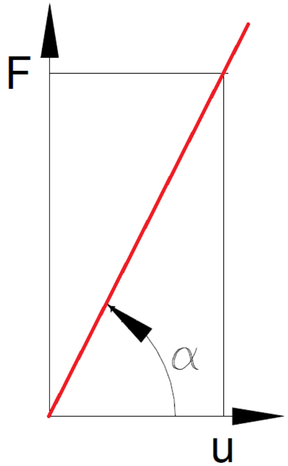
Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 4. Zagadnienia nieliniowe

10.2024

LINIOWY MODEL MES ZACHOWANIA STRUKTURY ODKSZTAŁCALNEJ



$$[K]\{q\} = \{F\} \Longrightarrow \{q\} = [K]^{-1}\{F\}$$

Jeśli obciążenie da się rozłożyć na składowe: $\boxed{\{F_*\} = \alpha\{F_a\} + \beta\{F_b\}}$

to można użyć metodę superpozycji:

$$\{q_*\} = [K]^{-1}\{F_*\}, \Longrightarrow \{q_*\} = [K]^{-1}(\alpha\{F_a\} + \beta\{F_b\}) = \alpha\boxed{[K]^{-1}\{F_a\}} + \beta\boxed{[K]^{-1}\{F_b\}}$$

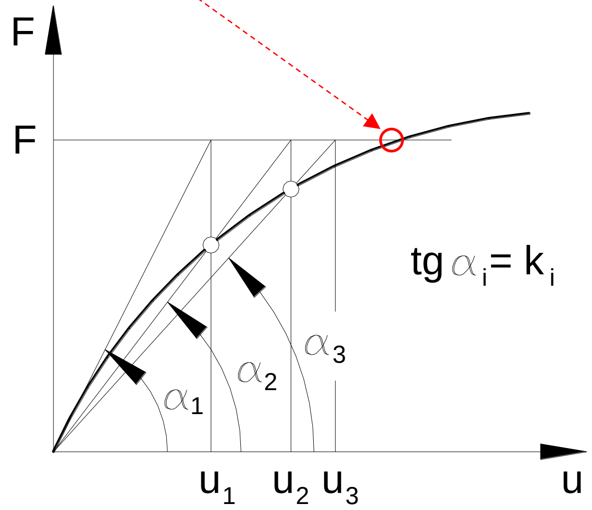
i wtedy rozwiązanie końcowe jest sumą rozwiązań składowych: $\boxed{\{q_*\} = \alpha\{q_a\} + \beta\{q_b\}}$

Nieliniowości strukturalne powodują, że odpowiedź konstrukcji zmienia się nieproporcjonalnie do przyłożonych sił. Realistycznie rzecz biorąc, prawie wszystkie konstrukcje są nieliniowe z natury, ale nie zawsze w takim stopniu, że nieliniowości te mają znaczący wpływ na analizę.

NIELINIOWY MODEL MES ZACHOWANIA STRUKTURY ODKSZTAŁCALNEJ

W analizie nieliniowej macierz sztywności konstrukcji i wektor obciążenia mogą zależeć od rozwiązania i dlatego są nieznane.
Aby rozwiązać problem, program używa procedury iteracyjnej, w której szereg przybliżeń liniowych zbiega się do rzeczywistego rozwiązania nieliniowego.

$$[K(\{q\})]\{q\} = \{F(\{q\})\}$$

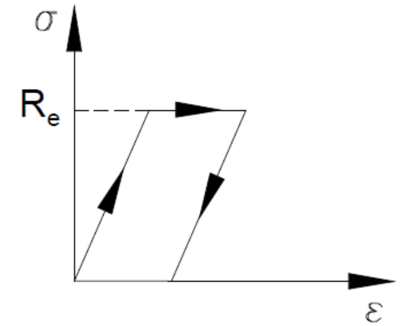


- Czy rozwiązanie istnieje? Ile rozwiązań istnieje?
- Rozwiązanie czasochłonne
- Iteracyjny proces rozwiązania – problem konwergencji
- Wyniki obciążenia zależą od historii ładowania

Przyczyny zachowania nieliniowego

Nieliniowości materiałowe - nieliniowe zależności **σ-ε**
Czynniki mogące wpływać na właściwości **σ-ε** materiału:

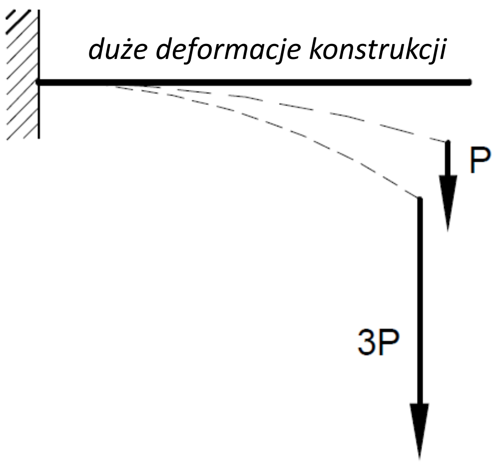
- historia obciążenia (*jak w przypadku odpowiedzi sprężysto-plastycznej*),
- warunki środowiskowe (*np. temperatura*)
- czas w którym obciążenie działa (*jak w przypadku pełzania*).

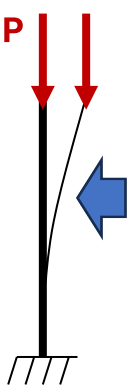


prosty sprężysto-plastyczny model zachowania się materiału

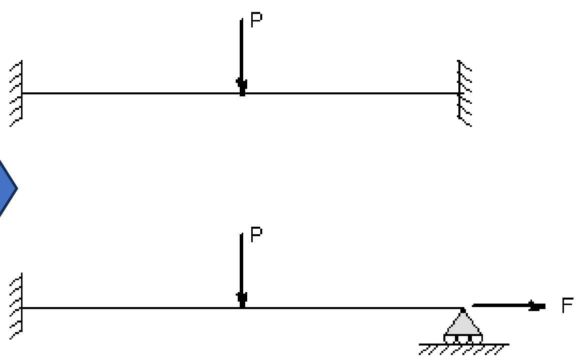
Nieliniowości geometryczne
Jeśli struktura doświadcza dużych odkształceń, jej zmieniająca się konfiguracja geometryczna może spowodować, że struktura zareaguje nieliniowo.

Pod obciążeniami poprzecznymi belka jest bardzo elastyczna.
W miarę wzrostu siły P pręt ugina się tak bardzo, że ramię momentu zmniejsza się zauważalnie, powodując wzrost sztywności przy większych obciążeniach.





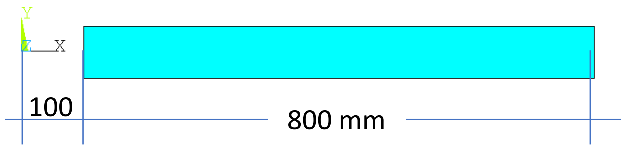
Siły osiowe mogą zwiększać lub zmniejszać sztywność belki w zależności od kierunku sił.

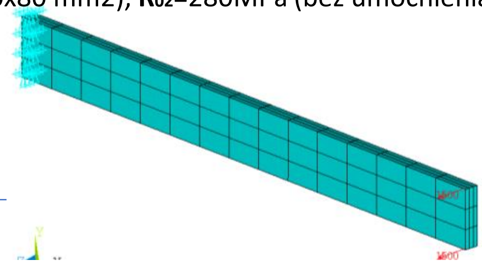


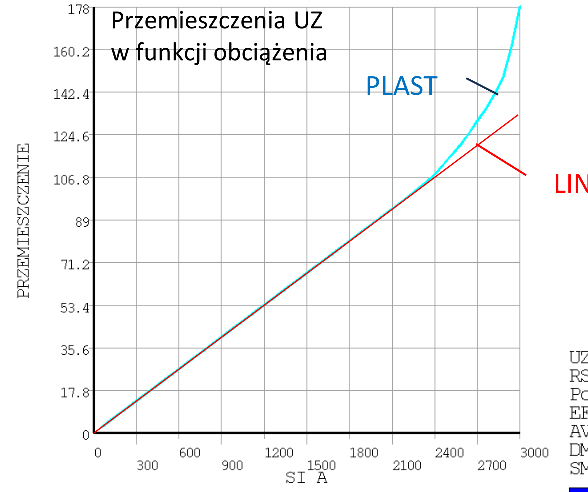
Nieliniowości materiałowe

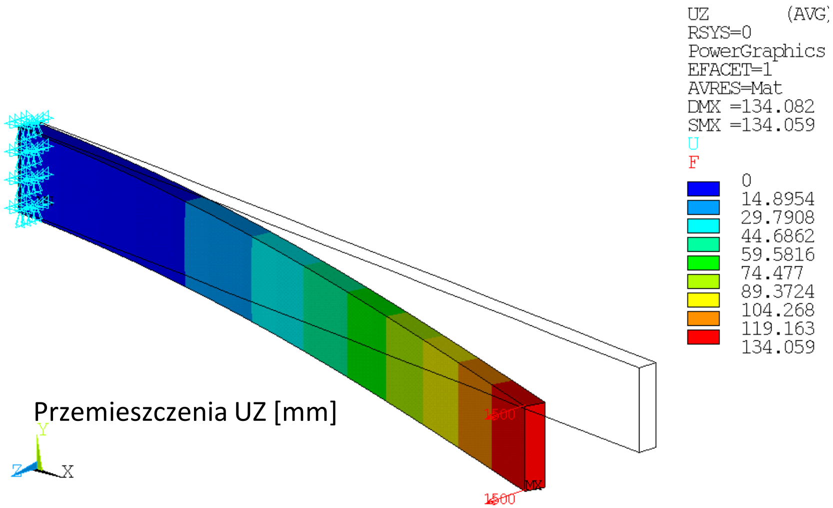
Przykład 1 – duralowy płaskownik (A=20x80 mm2), R_{02}=280MPa (bez umocnienia)

Obciążony siłą (FZ=3000 N)

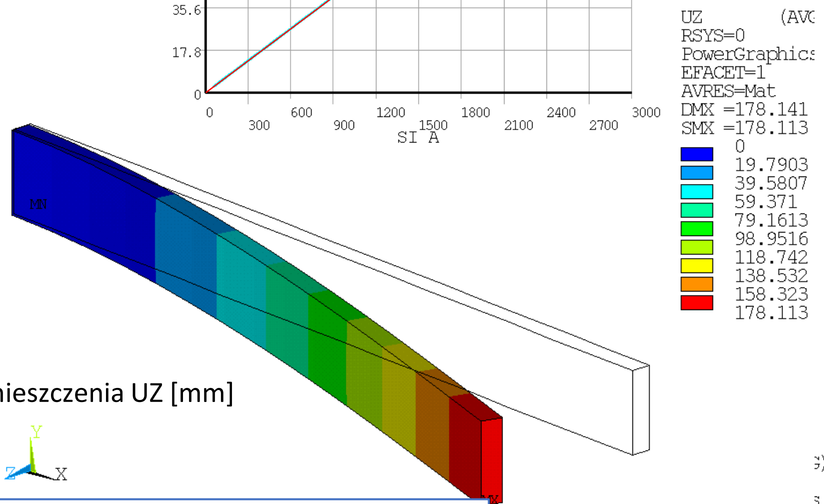








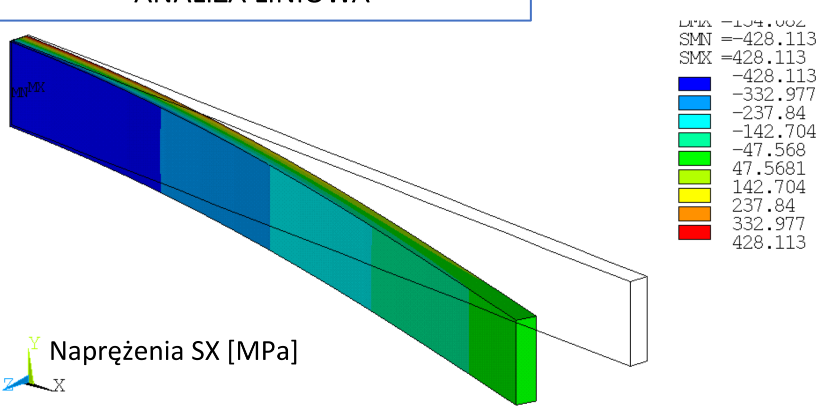
Przemieszczenia UZ [mm]



Przemieszczenia UZ [mm]

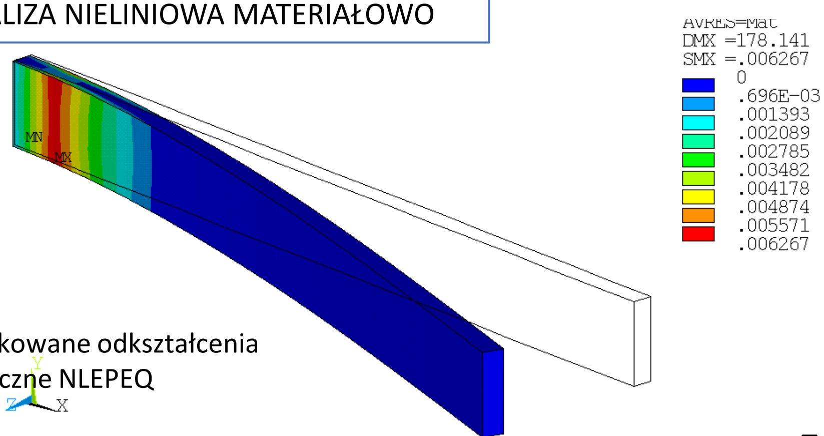
ANALIZA LINIOWA

ANALIZA NIELINIOWA MATERIAŁOWO



Naprężenia SX [MPa]

Dural FZ=3000N Liniowy model



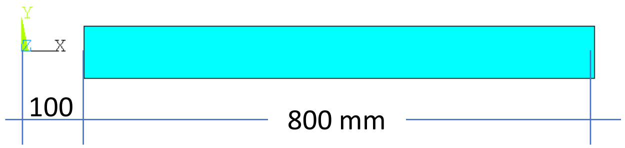
Zredukowane odkształcenia plastyczne NLEPEQ

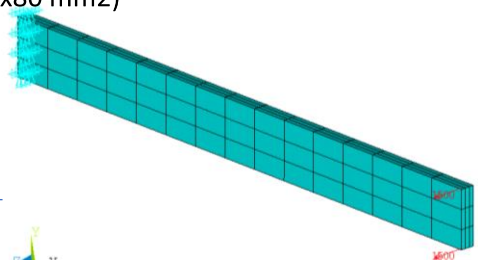
Dural FZ=3000N Re=280MPa

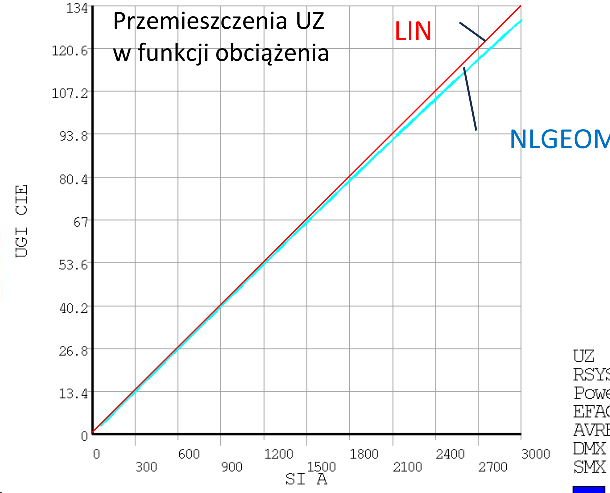
Nieliniowości geometryczne

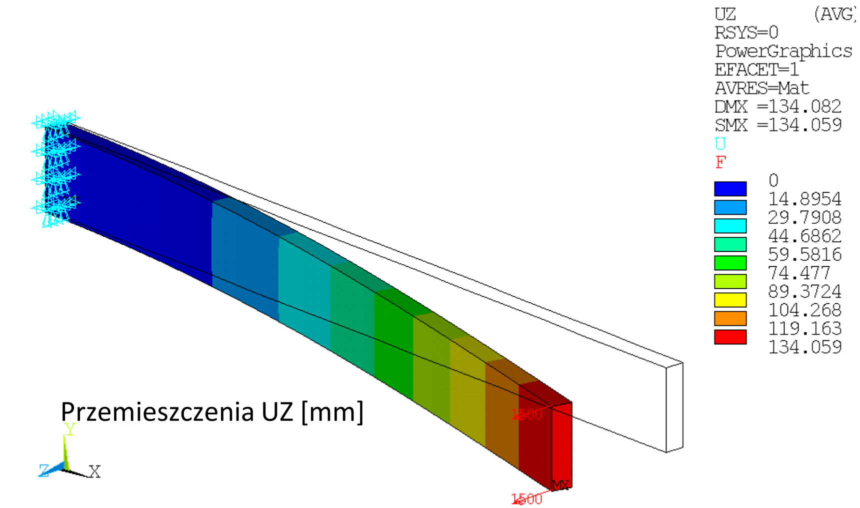
Przykład 2 – duralowy płaskownik (A=20x80 mm2)

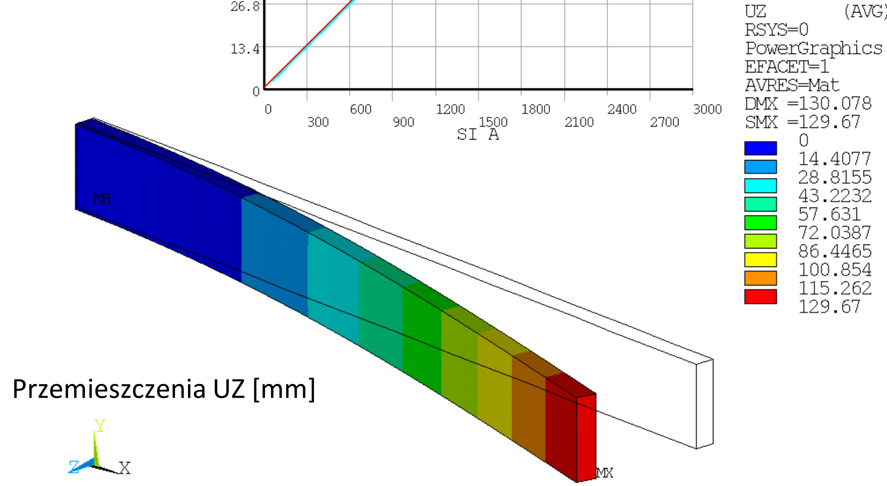
Obciążony siłą (FZ=3000 N)





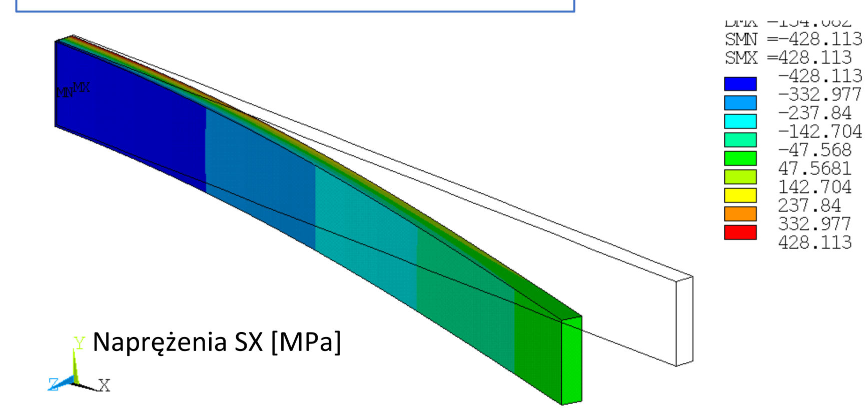


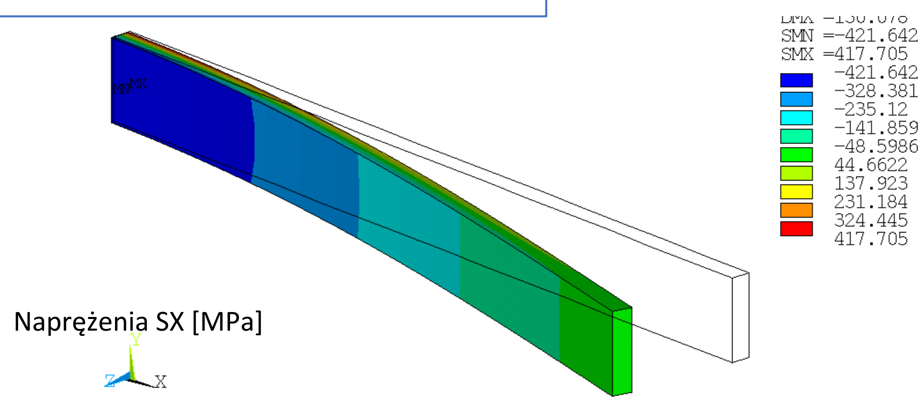




ANALIZA LINIOWA

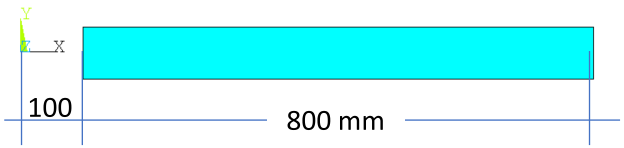
ANALIZA GEOMETRYCZNIE NIELINIOWA

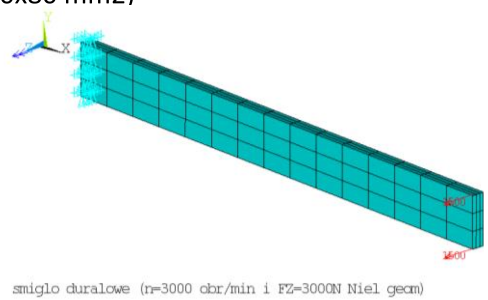


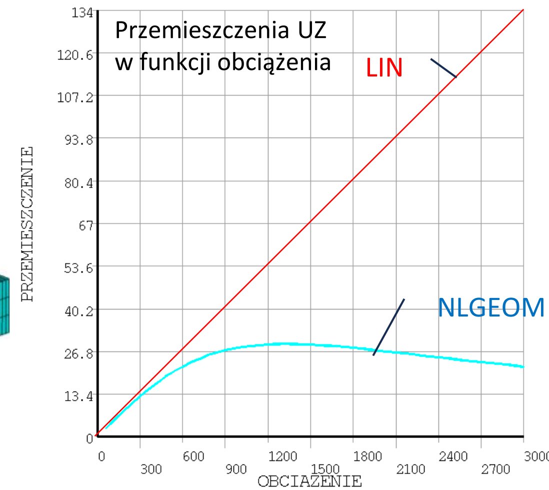


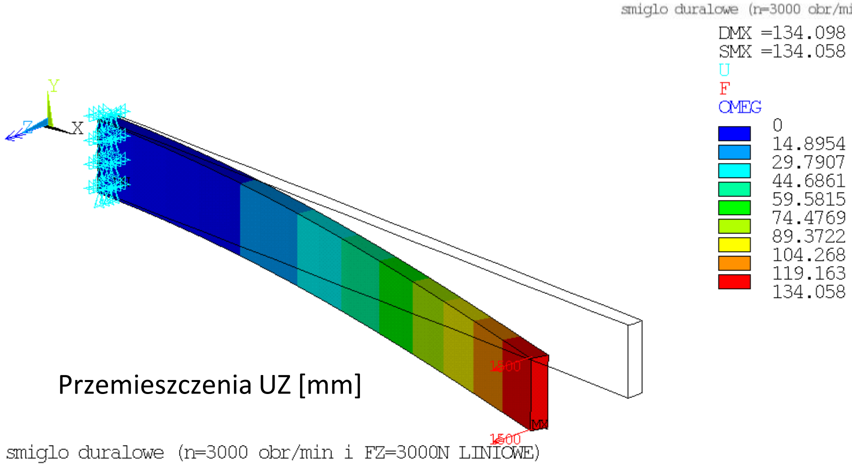
Nieliniowości geometryczne

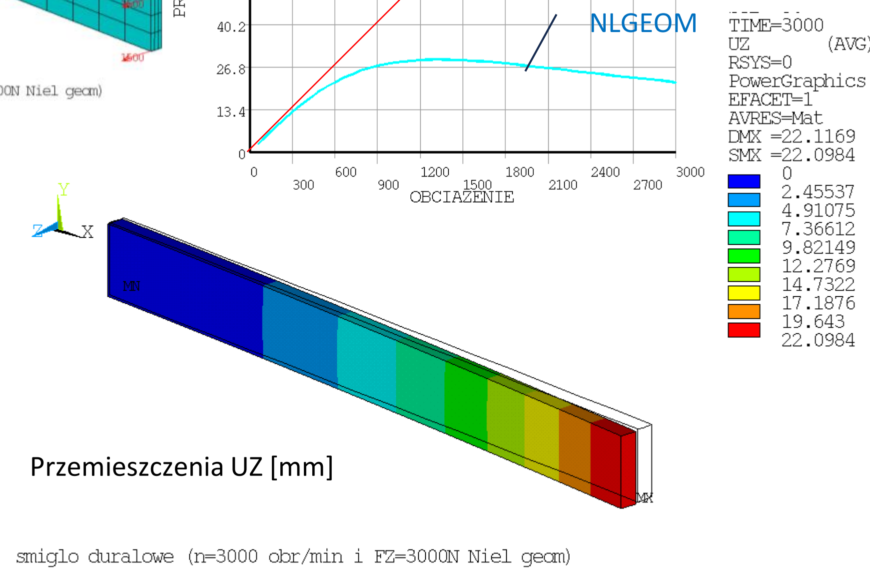
Przykład 3 – duralowy płaskownik (A=20x80 mm2)
wirujący względem osi Z (n=3000 obr./min)
i obciążony siłą (FZ=3000 N)





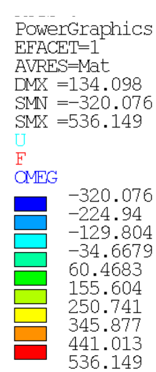


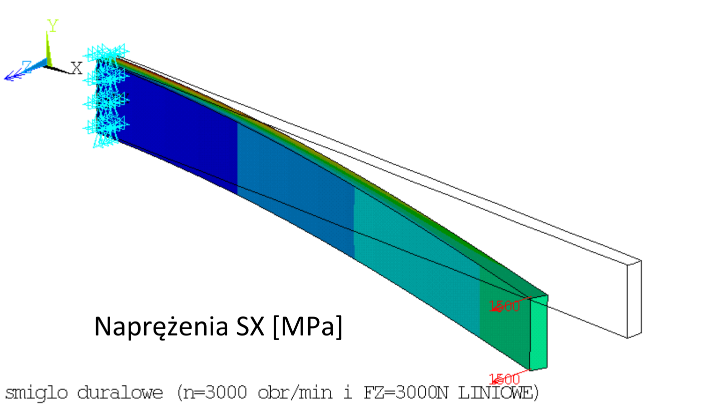


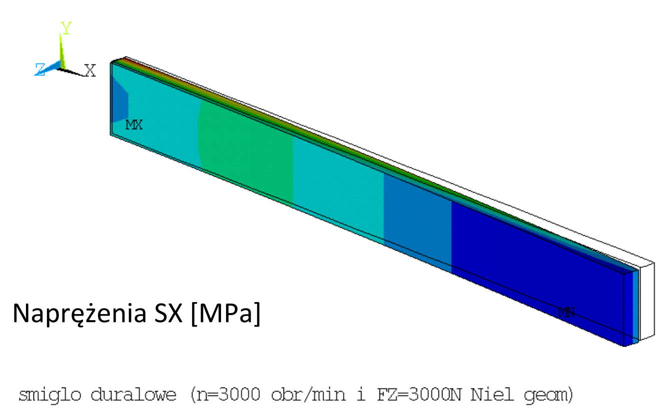


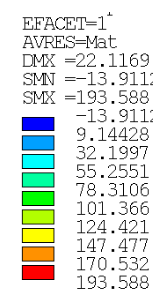
ANALIZA LINIOWA

ANALIZA GEOMETRYCZNIE NIELINIOWA



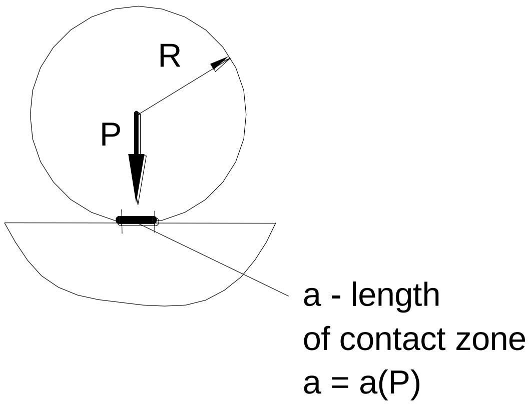


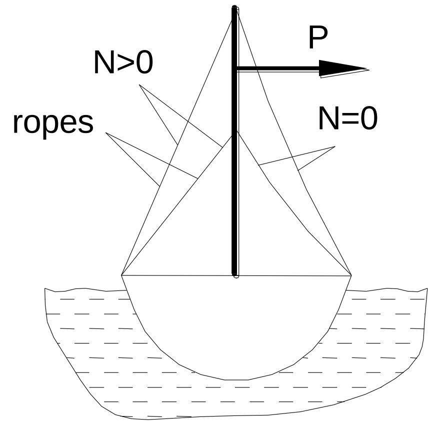




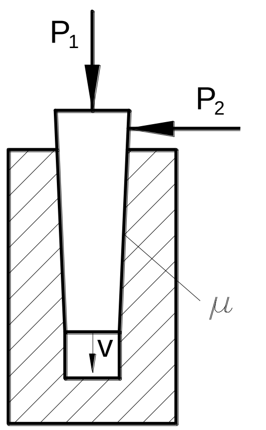
Przyczyny zachowania nieliniowego (c.d.)

Tarcie, oddziaływanie kontaktowe, przerwy (gaps), liny

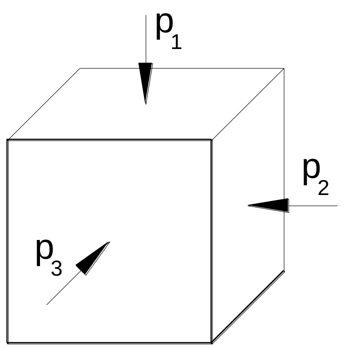




Znaczenie historii obciążenia dla wyniku końcowego obciążenia

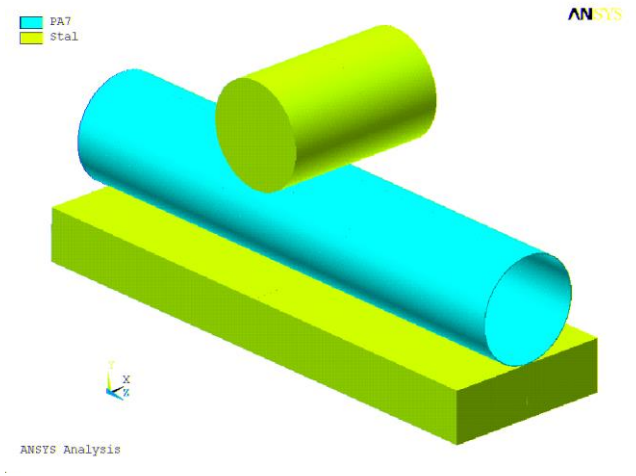


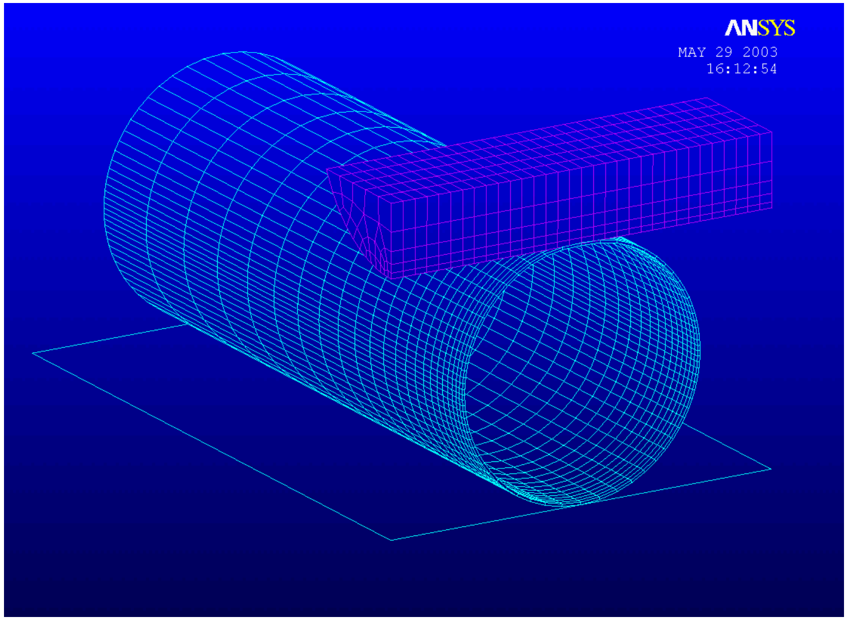
tarcie



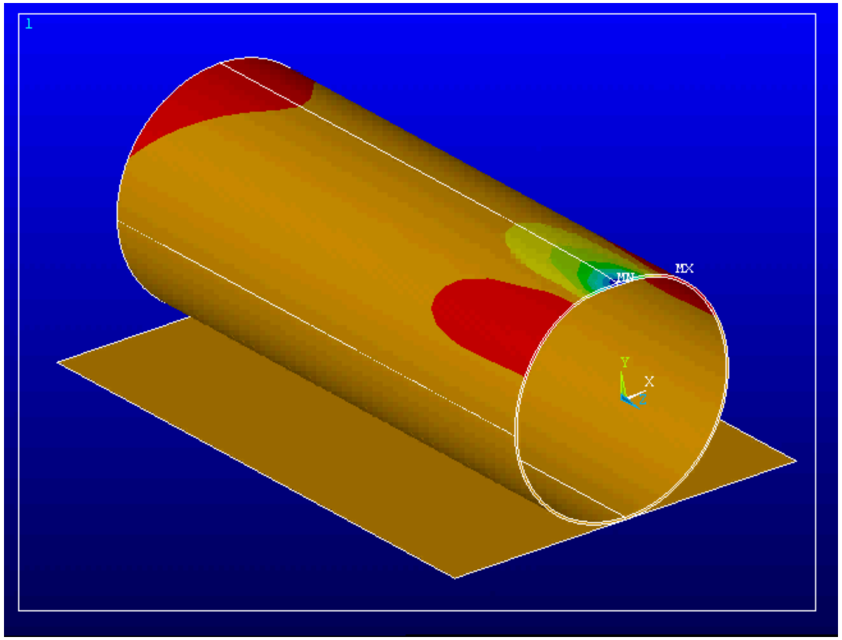
materiał sprężysto-plastyczny

Test 1: zderzenie walca z rurą

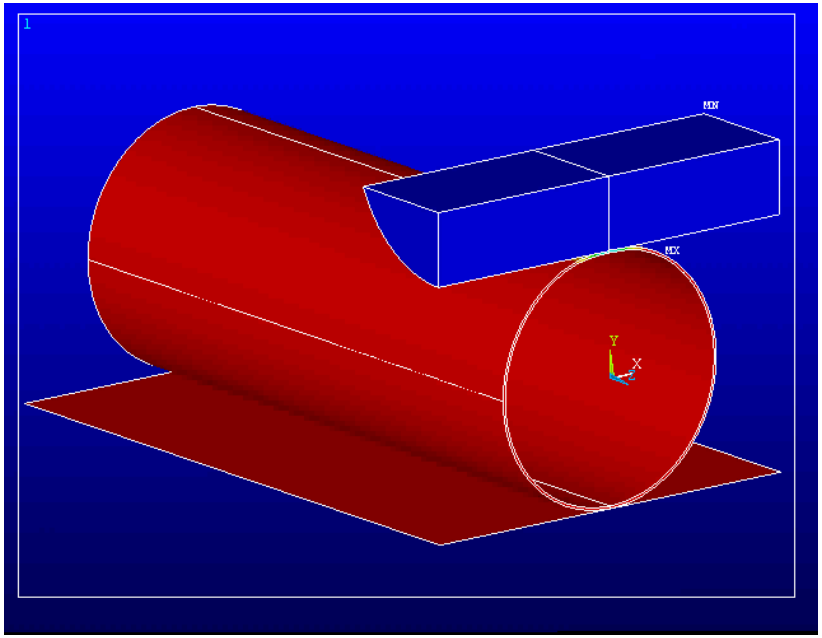




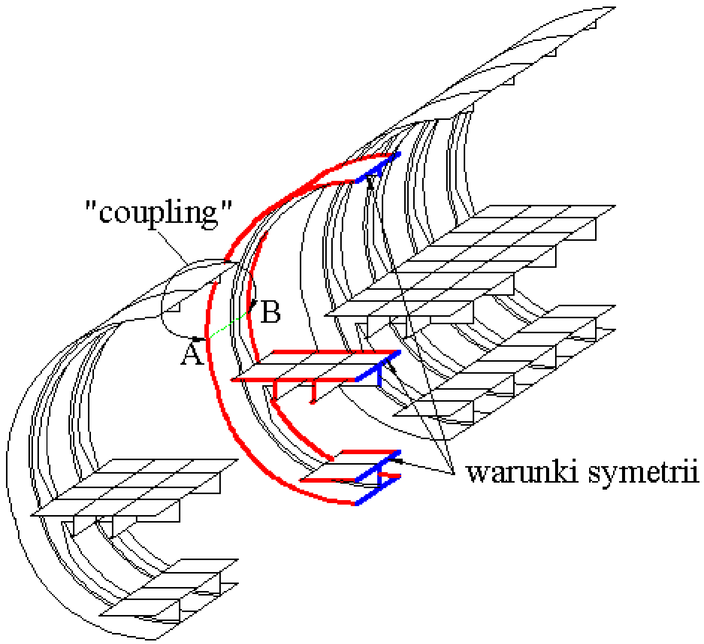
Zgniatanie quasistatyczne:

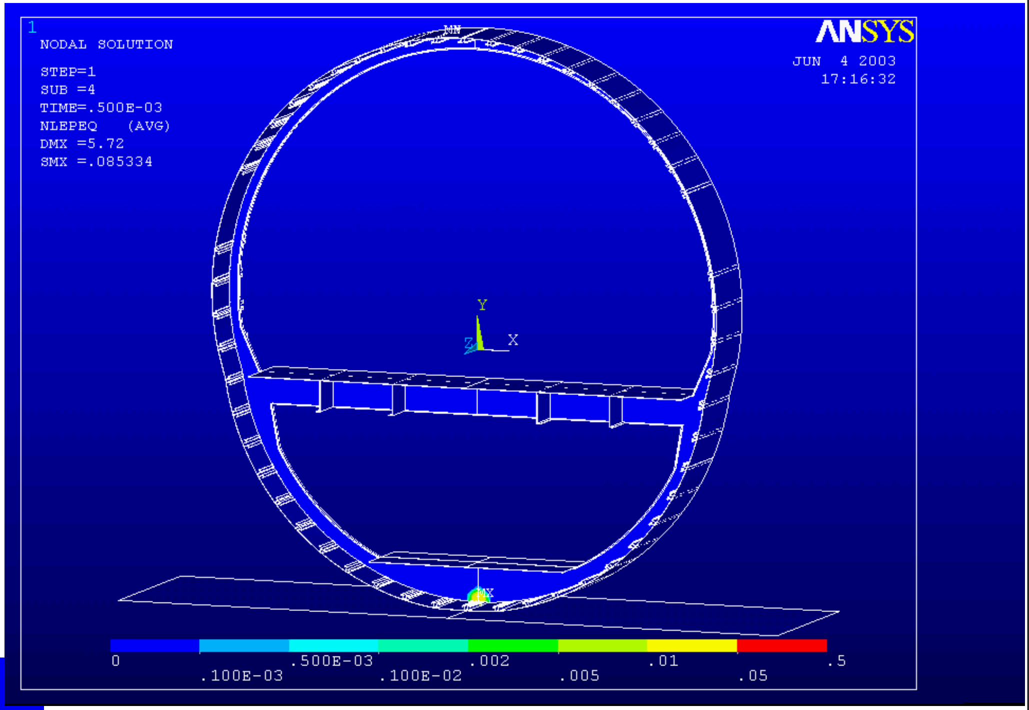


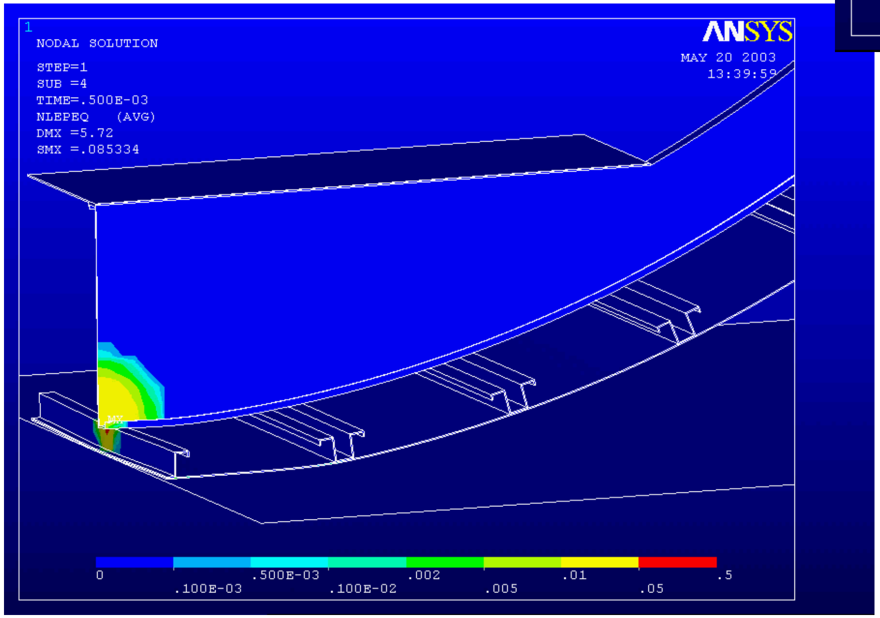
Zderzenie (pełna dynamika)



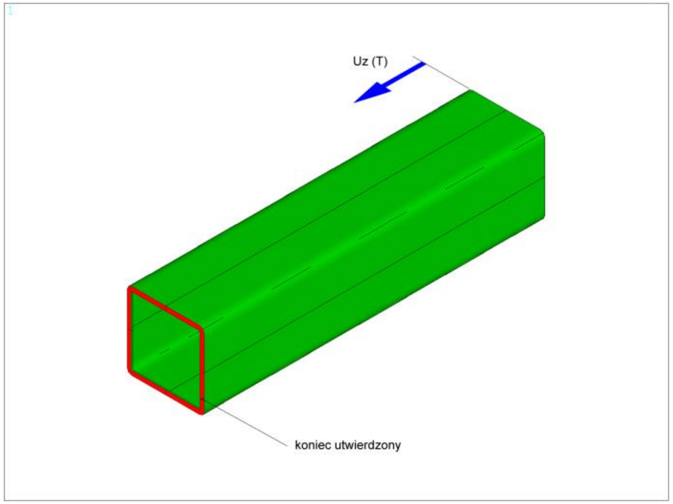
Test 2. Zderzenie sekcji kadłuba samolotu Boeing 737-200

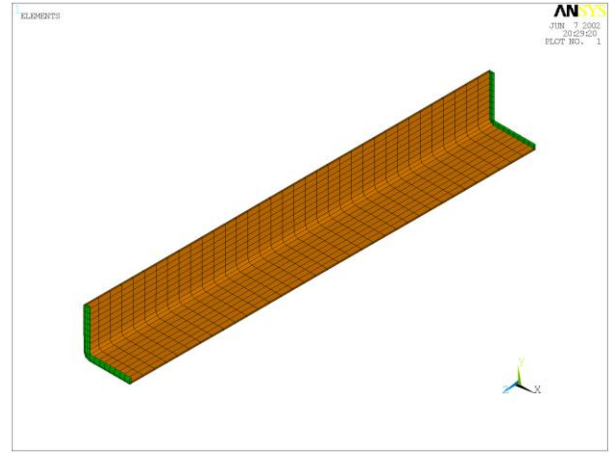




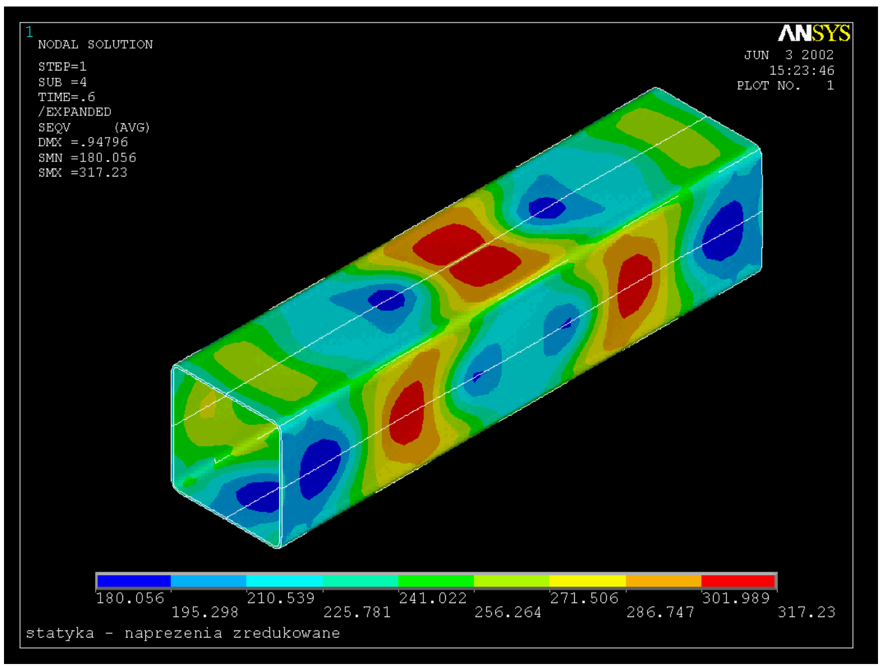


Test 3. Analiza utraty stateczności ściskanego osiowo elementu cienkościennego o przekroju zamkniętym

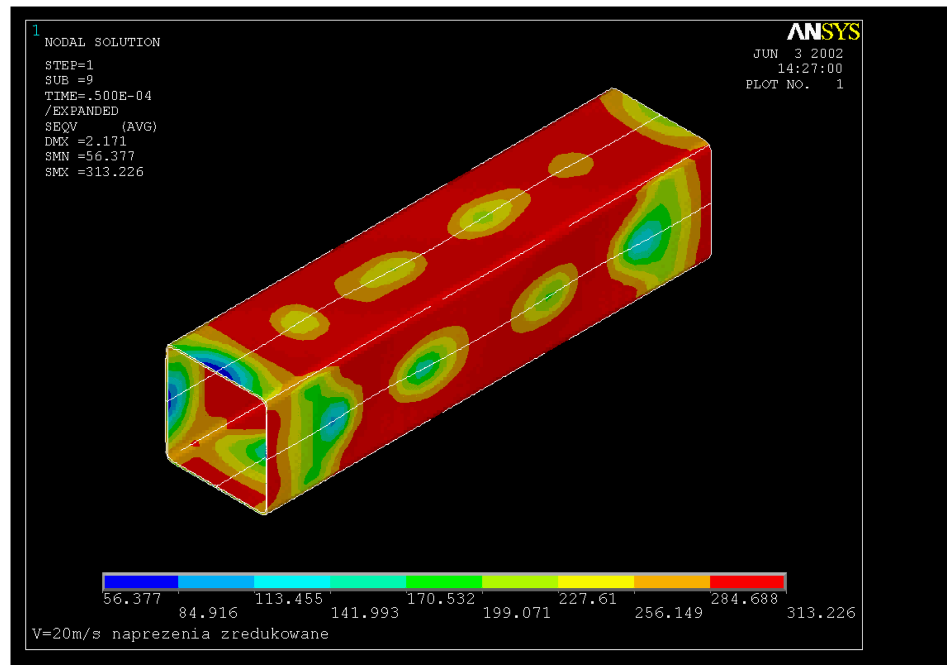




Model MES

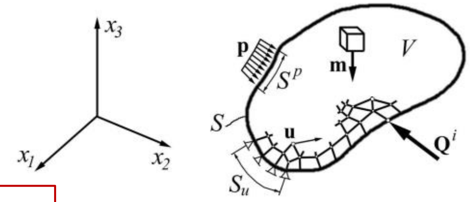


1) Analiza pod obciążeniem statycznym zmiennym w czasie, zadanym przemieszczeniowo



2) Analiza dynamiczna, po uderzeniu nieskończenie dużą masą o ustalonej prędkości (nieskończenie duża energia uderzenia).

Opis ciała odkształcalnego o nieliniowych właściwościach



Wektory składowych stanu odkształcenia i naprężenia

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \gamma_{12}, \quad \gamma_{23}, \quad \gamma_{13}],} \qquad \boxed{\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{11}, \quad \sigma_{22}, \quad \sigma_{33}, \quad \sigma_{12}, \quad \sigma_{23}, \quad \sigma_{13}].}$$

Związki kinematyczne pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami otrzymuje się przez analizę zmian wymiarów elementarnego fragmentu ciała, a następnie uzyskane wyrażenie rozwija się w szereg Taylora:

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{\alpha,i}u_{\alpha,j}),}$$

gdzie indeksy po przecinkach oznaczają różniczkowanie po składowych $i, j, \alpha = 1, 2, 3$.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(u_{1,1})^2 + \frac{1}{2}(u_{2,1})^2 + \frac{1}{2}(u_{3,1})^2 \\ \frac{1}{2}(u_{1,2})^2 + \frac{1}{2}(u_{2,2})^2 + \frac{1}{2}(u_{3,2})^2 \\ \frac{1}{2}(u_{1,3})^2 + \frac{1}{2}(u_{2,3})^2 + \frac{1}{2}(u_{3,3})^2 \\ u_{1,1}\, u_{1,2} + u_{2,1}\, u_{2,2} + u_{3,1}\, u_{3,2} \\ u_{1,2}\, u_{1,3} + u_{2,2}\, u_{2,3} + u_{3,2}\, u_{3,3} \\ u_{1,1}\, u_{1,3} + u_{2,1} u_{2,3} + u_{3,1}\, u_{3,3} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{B}_0\, \boldsymbol{q} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{q})\, \boldsymbol{q} = \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^L + \boldsymbol{\varepsilon}^{NL}},$$

gdzie pochodne macierzy funkcji kształtu:

$$\boldsymbol{N}_{i\bullet,j}{}^T = \left[\frac{\partial n_{i1}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial n_{i2}}{\partial x_j}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial n_{iL}}{\partial x_j}\right]$$

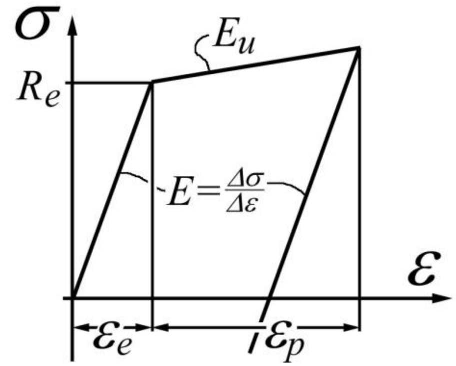
$$\boldsymbol{N}_{,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_{11}}{\partial x_j} & \frac{\partial n_{12}}{\partial x_j} & \ldots & \frac{\partial n_{1L}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial n_{12}}{\partial x_j} & \frac{\partial n_{22}}{\partial x_j} & \ldots & \frac{\partial n_{2L}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial n_{13}}{\partial x_j} & \frac{\partial n_{23}}{\partial x_j} & \ldots & \frac{\partial n_{3L}}{\partial x_j} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{N}_{1\bullet,1}{}^T \\ \boldsymbol{N}_{2\bullet,2}{}^T \\ \boldsymbol{N}_{3\bullet,3}{}^T \\ \boldsymbol{N}_{1\bullet,2}{}^T + \boldsymbol{N}_{2\bullet,1}{}^T \\ \boldsymbol{N}_{2\bullet,3}{}^T + \boldsymbol{N}_{3\bullet,2}{}^T \\ \boldsymbol{N}_{1\bullet,3}{}^T + \boldsymbol{N}_{3\bullet,1}{}^T \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}_1 = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{N}_{,1}{}^T \boldsymbol{N}_{,1} \\ \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{N}_{,2}{}^T \boldsymbol{N}_{,2} \\ \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{N}_{,3}{}^T \boldsymbol{N}_{,3} \\ \boldsymbol{q}^T (\boldsymbol{N}_{,1}{}^T \boldsymbol{N}_{,2} + \boldsymbol{N}_{,2}{}^T \boldsymbol{N}_{,1}) \\ \boldsymbol{q}^T (\boldsymbol{N}_{,2}{}^T \boldsymbol{N}_{,3} + \boldsymbol{N}_{,3}{}^T \boldsymbol{N}_{,2}) \\ \boldsymbol{q}^T (\boldsymbol{N}_{,1}{}^T \boldsymbol{N}_{,3} + \boldsymbol{N}_{,3}{}^T \boldsymbol{N}_{,1}) \end{Bmatrix},$$

Liniowa składowa odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}^L$ jest iloczynem macierzy $\mathbf{B}_0$ i wektora parametrów węzłowych **q**.
Macierz $\mathbf{B}_0$ zależy wyłącznie od funkcji kształtu.
Nieliniowa składowa odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}$ jest iloczynem macierzy $\mathbf{B}_1$ i wektora parametrów węzłowych **q**.

Zależność pomiędzy składowymi wektora składowych stanu naprężenia **σ,** a składowymi wektora odkształcenia sprężystego $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ można zapisać na podstawie prawa Hooka przy pomocy macierzy konstytutywnej **D**, która zawiera właściwości sprężyste materiału (E i ν):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{e}}.$$



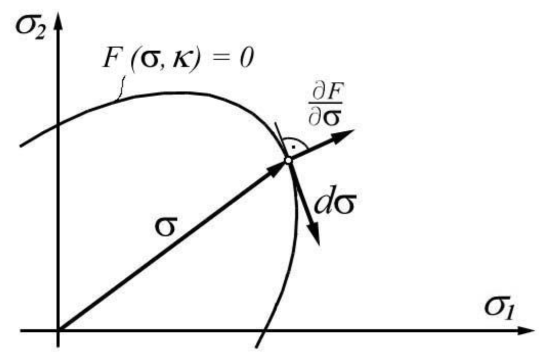
Zależność σ = f (ε) dotyczącą materiału o właściwościach sprężysto-plastycznych z umocnieniem dla jednoosiowego stanu naprężenia.

Odkształcenie całkowite **ε**:

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p.}$$

Poza zakresem sprężystym przyrost odkształceń plastycznych $d\boldsymbol{\varepsilon}_p$ wyznacza się np. z prawa płynięcia jako iloczyn skalarnego mnożnika $d\lambda$ i pochodnej potencjału plastycznego Q względem wektora składowych stanu naprężenia:

$$\boxed{d\boldsymbol{\varepsilon}_p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}.}$$



Jeśli potencjał Q zastąpi się funkcją plastyczności F (**σ,** κ), zależność przyjmie postać stowarzyszonego prawa płynięcia (z odpowiednim warunkiem plastyczności). Współczynnik κ oznacza pracę plastyczną zsumowaną dla całej historii obciążenia, związaną z izotropowym umocnieniem materiału. Korzystając z hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego warunek plastyczności zapisuje się w postaci:

$$\boxed{F = \sigma_{redHMH} - R_e(\kappa) = 0,}$$

$$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} + 3({\tau_{12}}^2 + {\tau_{23}}^2 + {\tau_{31}}^2)} - R_e(\kappa) = 0.$$

Po przekształceniach mamy:

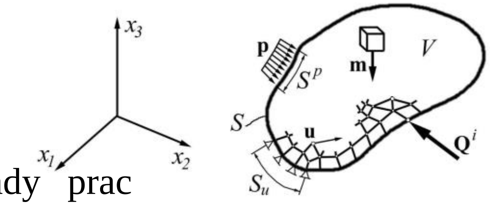
$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}_p) = \boxed{\left\{\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^T}\boldsymbol{D}\left(E_u + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^T}\boldsymbol{D}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^{-1}\right\}} d\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{D}^* \, d\boldsymbol{\varepsilon}.$$

przyrost naprężenia

macierz sprężysto-plastyczna

Jeśli w ustroju nie występują odkształcenia plastyczne macierz **D*** jest równa macierzy konstytutywnej **D**

Zasada prac przygotowanych



Równania równowagi ciała przedstawionego na rysunku można uzyskać z zasady prac przygotowanych, pamiętając, że praca przygotowana reakcji sztywnych więzów jest równa zero:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV - \int_{Sp} \boldsymbol{p}^T \delta\boldsymbol{u}\, dV - \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{Q}^i \delta\boldsymbol{u}_i - \int_V \boldsymbol{m}^T \delta\boldsymbol{u}\, dV = 0$$

Siły masowe **m** wyznacza się z iloczynu gęstości i przyspieszeń $\ddot{\mathbf{u}}(t)$: $\boxed{\boldsymbol{m} = -\rho\, \boldsymbol{N}\, \ddot{\boldsymbol{q}}.}$

<u>Uogólnione przemieszczenie przygotowane</u> $\delta\mathbf{u}$ wyznacza się jako iloczyn macierzy funkcji kształtu i <u>przemieszczenia przygotowanego parametrów węzłowych</u>: $\boxed{\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\, \delta\boldsymbol{q}.}$

<u>Przemieszczenia przygotowane odkształceń</u> $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ wyznacza się wykorzystując liniowość macierzy $\mathbf{B}_1$ względem wektorów **q** i $\delta\mathbf{q}$:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}_0\delta\boldsymbol{q} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{q})\delta\boldsymbol{q} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_1(\delta\boldsymbol{q})\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{q}))\delta\boldsymbol{q}.$$

Korzystając z powyższych zależności oraz przemienności iloczynu skalarnego wektorów zasadę prac przygotowanych da się przedstawić w następujący sposób:

$$\int_V \delta\boldsymbol{q}^T({\boldsymbol{B}_0}^T + {\boldsymbol{B}_1}^T)\boldsymbol{\sigma}\; dV - \int_{Sp} \delta\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{p}\, dV - \sum_{i=1}^{m} \delta\boldsymbol{q}^T {\boldsymbol{N}_i}^T \boldsymbol{Q}^i + \int_V \delta\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{N}^T \rho \boldsymbol{N}\ddot{\boldsymbol{q}}\, dV = 0.$$

Zapisując powyższe równanie po umieszczeniu wariacji $\delta\mathbf{q}$ przed znakami całek i sumy otrzymamy:

$$\delta\boldsymbol{q}^T\left(\int_V({\boldsymbol{B}_0}^T + {\boldsymbol{B}_1}^T)\boldsymbol{\sigma}\; dV - \int_{Sp} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{p}\, dV - \sum_{i=1}^{m} {\boldsymbol{N}_i}^T \boldsymbol{Q}^i + \int_V \boldsymbol{N}^T \rho \boldsymbol{N}\ddot{\boldsymbol{q}}\, dV\right) = 0,$$

Ponieważ przemieszczenia przygotowane $\delta\mathbf{q}$ są dowolne i różne od zera, spełnienie tego równania wymaga zerowania się wyrażenia w nawiasie.

Grupując poszczególne wyrazy w wektor sił wewnętrznych $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ i wektor obciążeń zewnętrznych $\mathbf{R}^0$ niezależny od parametrów węzłowych, uzyskuje się następujący układ równań nieliniowych:

$$\boxed{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{R}^0 = \boldsymbol{0},} \qquad (*)$$

w którym:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}) = \int_V (\boldsymbol{B}_0{}^T + \boldsymbol{B}_1{}^T)\, \boldsymbol{\sigma}\, dV,$$

$$\boldsymbol{R}^0 = \int_{Sp} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{p}\, dV + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{N}_i{}^T \boldsymbol{Q}^i - \int_V \boldsymbol{N}^T \rho \boldsymbol{N} \ddot{\boldsymbol{q}}\, dV.$$

W zagadnieniach dynamicznych z tłumieniem zależność powyższą uzupełnia się o macierz tłumienia **C,** proporcjonalną do prędkości $d\mathbf{q}/dt$. Pełne równanie ruchu ciała przyjmuje wtedy następującą postać:

$$\boxed{\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q} = \boldsymbol{P}(t),} \qquad (**)$$

w którym: $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{P}(t) = \int_{Sp} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{p}(t)\, dV + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{N}_i{}^T \boldsymbol{Q}^i(t)$, $\boldsymbol{M} = \int_V \boldsymbol{N}^T \rho \boldsymbol{N}\, dV.$

Macierz **M** jest macierzą masową, wektor $\mathbf{P}(t)$ zawiera obciążenia zależne od czasu, natomiast $\mathbf{K}(\mathbf{q})$ jest nieliniową macierzą sztywności, zależną od przemieszczeń węzłowych.

Układ równań (*) rozwiązuje się metodami iteracyjnymi, np. metodą Newtona-Raphsona, która polega na linearyzacji przyrostu wektora **R** wokół położenia $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, uzyskiwanej przez rozwinięcie wyrażenia (*) w szereg Taylora, łącznie z wyrazem zawierającym pierwszą pochodną:

$$\boxed{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}_0) + \frac{\partial \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \Delta \boldsymbol{q}}$$

Pochodna wektora **R** względem wektora **q** oznaczana jest często jako macierz styczna $\mathbf{K}_T$. Przy różniczkowaniu należy uwzględnić wzór $\boldsymbol{D}^* = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{B}_0{}^T + \boldsymbol{B}_1{}^T \quad , \quad \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{D}^* \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{q}}.}$$

Po uwzględnieniu powyższych związków macierz styczna $\mathbf{K}_T$ może być przedstawiona jako suma trzech macierzy:

$$\boxed{\boldsymbol{K}_T = \frac{\partial \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} = \int_V \frac{\partial (\boldsymbol{B}_0{}^T \boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{q}}\, dV + \int_V \frac{\partial (\boldsymbol{B}_1{}^T \boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{q}}\, dV = \boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{K}_G + \boldsymbol{K}_L,} \qquad (***)$$

$$\boxed{\boldsymbol{K}_T = \frac{\partial \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} = \int_V \frac{\partial\left(\boldsymbol{B}_0{}^T\boldsymbol{\sigma}\right)}{\partial \boldsymbol{q}}\, dV + \int_V \frac{\partial\left(\boldsymbol{B}_1{}^T\boldsymbol{\sigma}\right)}{\partial \boldsymbol{q}}\, dV = \boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{K}_G + \boldsymbol{K}_L,} \quad (***)$$

gdzie:

$$\boldsymbol{K}_0 = \int_V \boldsymbol{B}_0{}^T \boldsymbol{D}^* \boldsymbol{B}_0{}^T\, dV$$ – początkowa macierz sztywności,

$$\boldsymbol{K}_G = \int_V \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{,1}{}^T & \boldsymbol{N}_{,2}{}^T & \boldsymbol{N}_{,3}{}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{22} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{22} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{22} & 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{N}_{,1} \\ \boldsymbol{N}_{,2} \\ \boldsymbol{N}_{,3} \end{Bmatrix} dV$$

– geometryczna macierz sztywności (wynikająca ze stanu naprężenia),

$$\boldsymbol{K}_L = \int_V \boldsymbol{B}_0{}^T \boldsymbol{D}^* \boldsymbol{B}_1{}^T\, dV + \int_V \boldsymbol{B}_1{}^T \boldsymbol{D}^* \boldsymbol{B}_0{}^T\, dV + \int_V \boldsymbol{B}_1{}^T \boldsymbol{D}^* \boldsymbol{B}_1{}^T\, dV$$ – macierz dużych przemieszczeń.

Dla liniowej statyki, przy małych przemieszczeniach i wyeliminowaniu członów zależnych od czasu otrzymujemy następującą postać:

$$\boldsymbol{K}_0 \boldsymbol{q} = \boldsymbol{P},$$ gdzie: **P** – wektor stałych obciążeń zewnętrznych.

W przypadku nieliniowej statyki, związanej z uwzględnieniem dużych przemieszczeń oraz wpływu naprężeń na sztywność ciała, układ równań (**) przyjmuje postać, w której macierz sztywności zależy od parametrów węzłowych:

$$\boldsymbol{K(q)q = P} \quad , \quad \boldsymbol{K_T = K_0 + K_G + K_L},$$

gdzie: K_T – macierz styczna, otrzymywana z zależności (***).

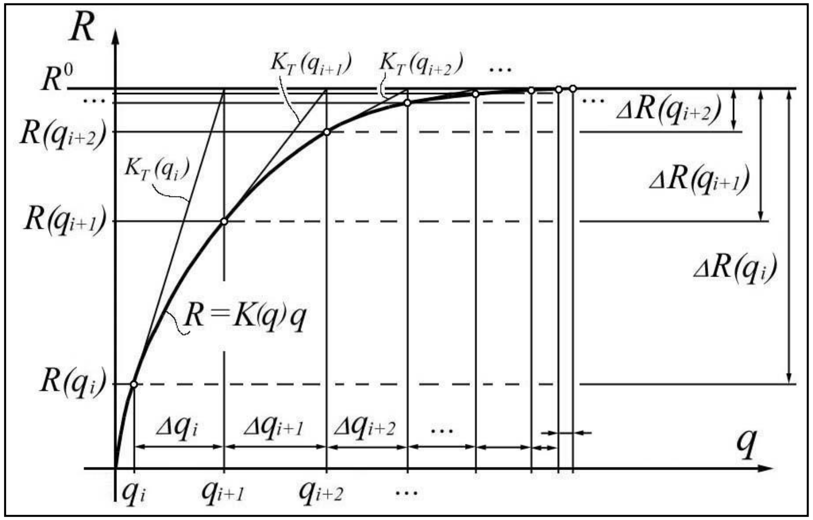
Metoda iteracyjna Newtona-Raphsona

Rozwiązanie układu równań nieliniowych w postaci (*) metodą Newtona-Raphsona polega na wielokrotnym rozwiązaniu zadania liniowego uzyskanego po linearyzacji wektora obciążeń wewnętrznych $\mathbf{R}(\mathbf{q})$.

W położeniu wyjściowym znany jest wektor $\mathbf{q}_0$ oraz wektor obciążeń zewnętrznych $\mathbf{R}^0$. W pierwszej iteracji indeks $i = 0$.

<u>Przebieg dojścia do rozwiązania jest następujący</u>:

1. Wyznaczenie wektora $\mathbf{R}(\mathbf{q}_i)$,
2. Wyznaczenie wektora residuum: $\Delta\mathbf{R}(\mathbf{q}_i) = \mathbf{R}^0 - \mathrm{R}(\mathbf{q}_i)$,
3. Wyznaczenie macierzy stycznej $\mathbf{K}_T(\mathbf{q}_i)$,
4. Wyznaczenia odwróconej macierzy stycznej $[\mathbf{K}_T(\mathbf{q}_i)]^{-1}$,
5. Znalezienie przyrostu: $\Delta\mathbf{q}_i = [\mathbf{K}_T(\mathbf{q}_i)]^{-1}\, \Delta\mathbf{R}(\mathbf{q}_i)$,
6. Wyznaczenie wektora parametrów węzłowych: $\Delta\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \Delta\mathbf{q}_i$,
7. Wyznaczenie normy (zwykle euklidesowej) wektorów $\Delta\mathbf{q}_i$ i $\Delta\mathbf{R}(\mathbf{q}_i)$,
8. Sprawdzenie kryterium zbieżności,
9. Zwiększenie indeksu: $i = i + 1$ i powtórzenie kroków od 1 do 9.



Iteracje są wykonywane dotąd, <u>aż zostaną spełnione kryteria zbieżności</u>:

a) przemieszczeniowe $\|\Delta\mathbf{q}_i\|_2 < \varepsilon_q \|\mathbf{q}_{ref}\|_2$
b) siłowe $\|\Delta\mathbf{R}(\mathbf{q}_i)\|_2 < \varepsilon_R \|\mathbf{R}_{ref}\|_2$

Wielkości ε_q i ε_R są tolerancjami, które z reguły przyjmuje się na poziomie około 0,1% wartości norm wektorów odniesienia $\mathbf{q}_{ref}$ i $\mathbf{R}_{ref}$. Wektorem odniesienia w przypadku przemieszczeń jest najczęściej aktualny stan $\mathbf{q}_i$, natomiast w przypadku kryterium siłowego za wektor odniesienia przyjmuje się wartość obciążenia $\mathbf{R}^0$ z danego podkroku.

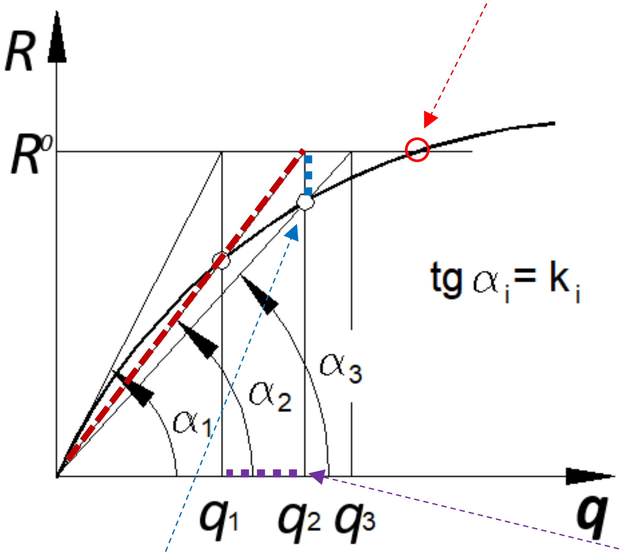
W metodzie elementów skończonych lepszą zbieżność uzyskuje się zwykle dla kryterium przemieszczeniowego.

Iteracyjne rozwiązanie układu nieliniowych równań jednoczesnych

Seria przybliżonych rozwiązań (iteracje): $\{q\}_0$, $\{q\}_1$, $\{q\}_2$, ...$\{q\}_n$

zbieżność do dokładnego rozwiązania

Wektor $\{q\}_i$ oblicza się na podstawie poprzedniego rozwiązania $\{q\}_{i-1}$



$$[K(\{q\}_{i-1})]\{q\}_i = \{R\}$$

$\{q\}_0$ – dowolne rozwiązanie początkowe (=0),

$[K]_i = [K(\{q\}_i)]$ – poprawiona macierz sztywności

Kryteria zbieżności:

Zbieżność przyrostu DOF

$\{\Delta q\}_i = \{q\}_i - \{q\}_{i-1}$ → $\|\{\Delta q\}_i\| \le \delta$

Konwergencja niezrównoważona (wektor resztkowy)

$\{\Delta R\}_{i+1} = \{R\} - [K]_i\{q\}_i$ → $\|\{\Delta R\}_i\| \le \varepsilon$

δ , ε - wartości odniesienia

Normy: $\|\{x\}\| = (\lfloor x \rfloor \{x\})^{\frac{1}{2}}$

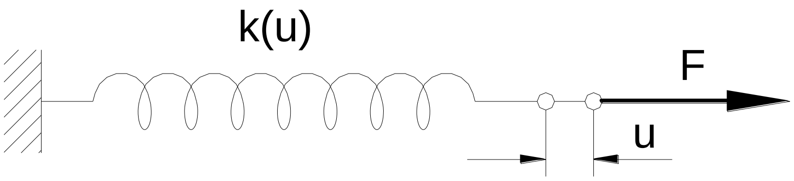
$\|\{x\}\| = \max \ x_i$

Kryteria dotyczące błędów względnych

$$\frac{\|\{\Delta q\}_i\|}{\|\{q\}_i\|} \le \varepsilon \qquad \frac{\|\{\Delta R\}_i\|}{\|\{R\}\|} \le \delta$$

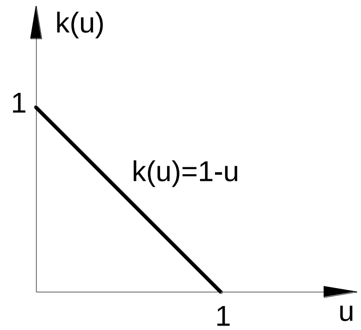
Techniki Iteracyjnego rozwiązania układu nieliniowych równań

Przykład 4: Znajdź przemieszczenie **u** dla sprężyny nieliniowej



$$k(u) = 1 - u$$

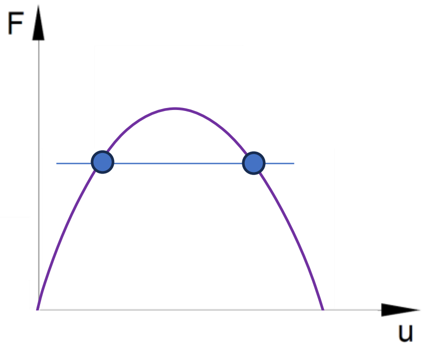
$$F_a = 0.2$$



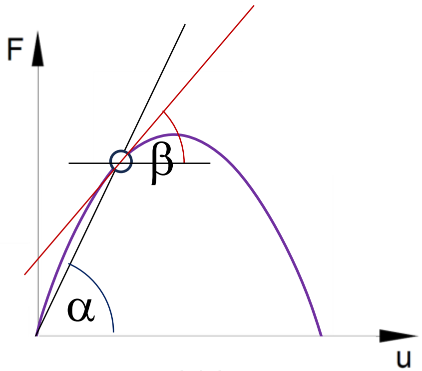
Rozwiązanie analityczne:

$$\boxed{k(u)u = F}$$

$$u^2 - u + F = 0 \Longrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{1-\sqrt{1-4F}}{2} = 0.2734, \\ u_2 = \dfrac{1+\sqrt{1-4F}}{2} = 0.7236. \end{cases}$$



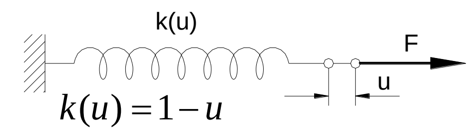
Rozwiązanie numeryczne:



tgα = k(u)
tgβ = k_T(u)

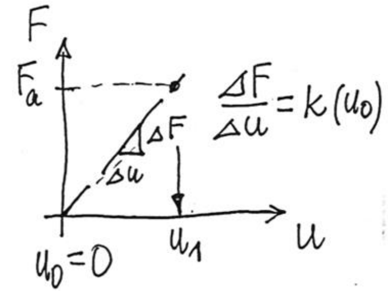
sztywność styczna:

$$k_T = \frac{dF}{du} = \frac{d}{du}\big(k(u)u\big) = \frac{dk}{du}u + k = 1 - 2u$$



Metoda bezpośrednia

$\{q\}_i = [K]_{i-1}^{-1}\{F\}$



Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0$

Iteracja 1: $u_1 = \frac{F_a}{k(u_0)}$

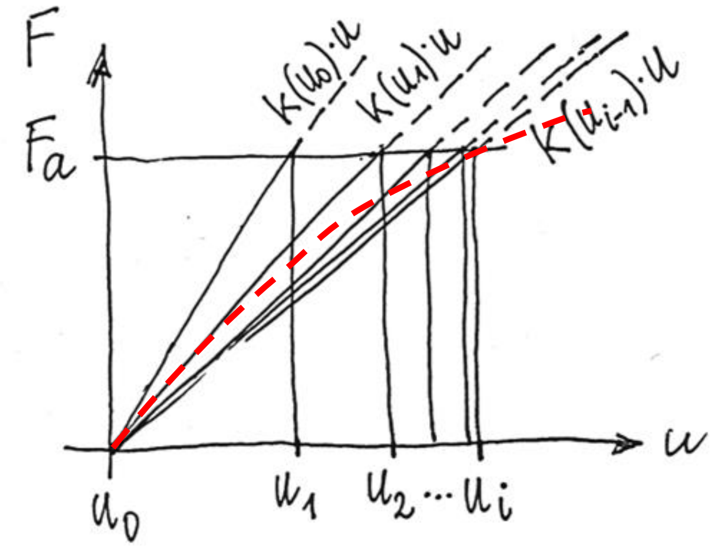
Iteracja „i" : $u_i = \frac{F_a}{k(u_{i-1})}$

Przyrost przemieszczenia:

$$\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$$

Kryterium zbieżności:

$$\frac{\Delta u_i}{u_i} \le \varepsilon$$

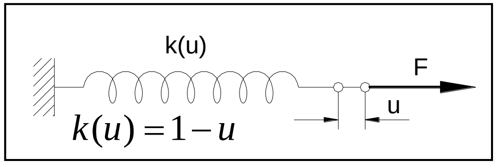


i	$u_i = \frac{F_a}{k(u_{i-1})}$	$k_i = 1 - u_i$	$\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$
1	0.2/1= **0.2**	1-0.2= **0.8**	0.2-0= **0.2**	**1**
2	0.2/0.8= **0.25**	1-0.25= **0.75**	0.25-0.2= **0.05**	**0.25**
3	0.2/0.75= **0.2667**	1-0.2667= **0.7333**	0.2667-0.25= **0.017**	**0.064**
4	0.2/0.7333= **0.2727**	1-0.2727= **0.7273**	0.2727-0.2666= **0.006**	**0.022**
5	0.2/0.7273= **0.2750**	1-0.275= **0.725**	0.275-0.2727= **0.0023**	**0.0084**
6	0.2/0.725= **0.2759**	1-0.2759= **0.7241**	0.2759-0.275= **0.0009**	**0.0032**

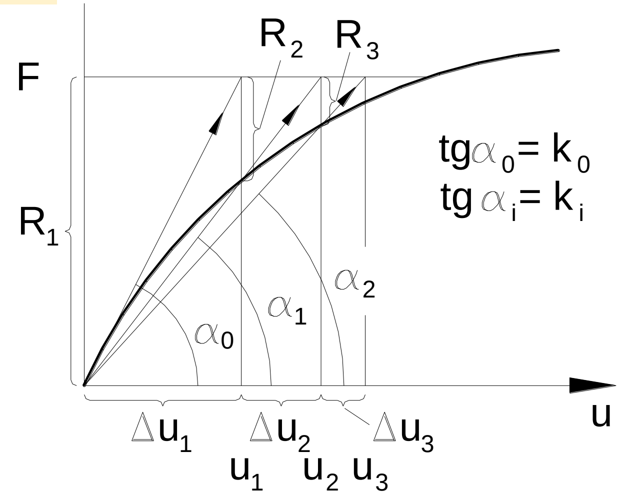
Metoda przyrostowa

Obliczenia dotyczą przyrostów wektora niewiadomych $\{q\}_i$

$$\{R\}_i = \{F\} - [K]_{i-1}\{q\}_{i-1}$$



Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0 = 1$



<u>Iteracja 1</u>:

Wektor residualny: $R_1 = F_a - k(u_0) \cdot u_0 = F_a$

przyrost przemieszczenia: $\Delta u_1 = \frac{R_1}{k(u_0)}$

przemieszczenie: $u_1 = \Delta u_1 + u_0 = \Delta u_1$

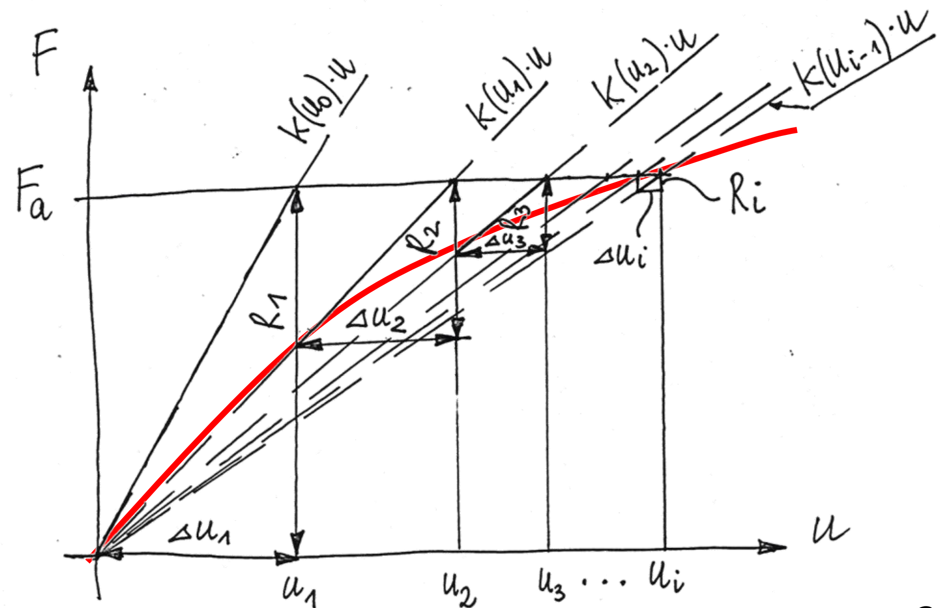
<u>Iteracja „i”</u>: $R_i = F_a - k(u_{i-1}) \cdot u_{i-1}$

$$\Delta u_i = \frac{R_i}{k(u_{i-1})}$$

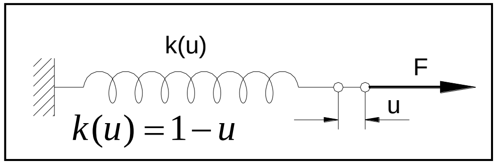
$$u_i = \Delta u_i + u_{i-1}$$

Kryteria zbieżności:

$$\frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \varepsilon \ ; \quad \frac{R_i}{F} \leq \delta$$



Metoda przyrostowa



Obliczenia dotyczą przyrostów wektora niewiadomych $\{q\}_i$

$$\{R\}_i = \{F\} - [K]_{i-1}\{q\}_{i-1}$$

Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0 = 1$

Iteracja 1:

Wektor residualny: $R_1 = F_a - k(u_0) \cdot u_0 = F_a$

przyrost przemieszczenia: $\Delta u_1 = \frac{R_1}{k(u_0)}$

przemieszczenie: $u_1 = \Delta u_1 + u_0 = \Delta u_1$

Iteracja „i”:

$$R_i = F_a - k(u_{i-1}) \cdot u_{i-1}$$

$$\Delta u_i = \frac{R_i}{k(u_{i-1})}$$

$$u_i = \Delta u_i + u_{i-1}$$

i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1}u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i / k_{i-1}$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.05	0.25	0.2	0.2
3	0.25	0.75	0.0125	0.0167	0.2667	0.063	0.063
4	0.2667	0.733	0.0044	0.006	0.2727	0.022	0.022
5	0.2727	0.7273	0.0017	0.0023	0.2750	0.008	0.0085

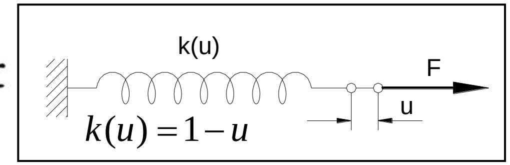
Kryteria zbieżności:

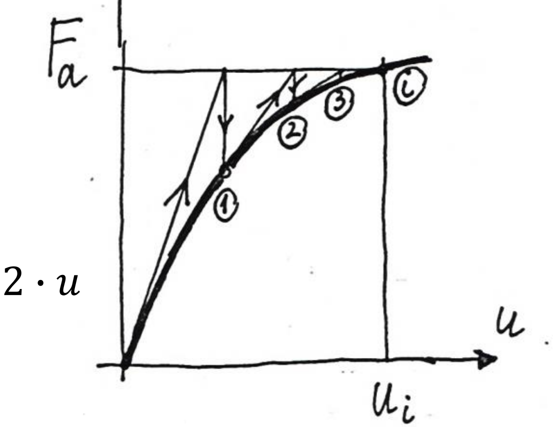
$$\frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \varepsilon \; ; \quad \frac{R_i}{F} \leq \delta$$

Metoda Newtona-Raphsona

W każdej iteracji w obliczeniach liniowego układu równań używana jest macierz styczna

$$[K]_T = \frac{d\{F\}}{d\{q\}} = [K] + \frac{d[K]}{d\{q\}}\{q\}$$





Sztywność styczna:

$$k_T = \frac{dF}{du} = \frac{d\big(k(u)\big)\cdot u}{du} = \frac{d\big(k(u)\big)}{du}\cdot u + \frac{du}{du}\cdot k(u) = -u + 1 - u = 1 - 2\cdot u$$

Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0 = 1$

Iteracja 1: $k_{T1} = \left.\frac{dF}{du}\right|_{u_0} = 1 - 2\cdot u_0$

Wektor residualny: $R_1 = F_a - k(u_0)\cdot u_0 = F_a$

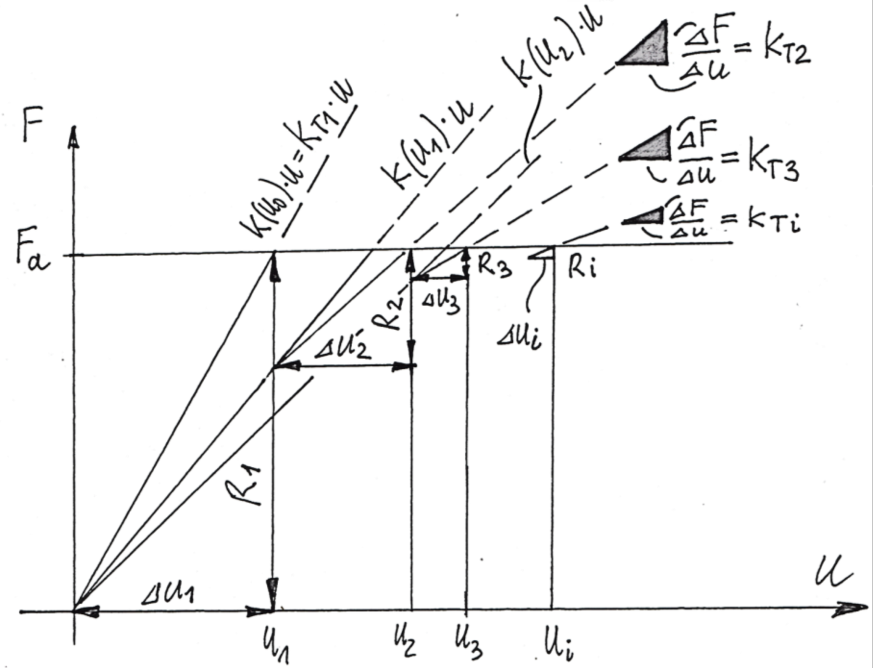
przyrost przemieszczenia: $\Delta u_1 = \frac{R_1}{k_{T1}}$

przemieszczenie: $u_1 = \Delta u_1 + u_0 = \Delta u_1$

Iteracja „i”: $k_{T1} = \left.\frac{dF}{du}\right|_{u_{i-1}} = 1 - 2\cdot u_{i-1}$

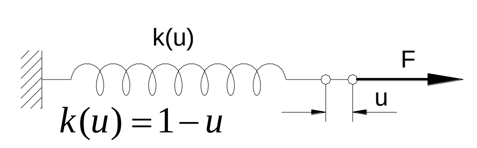
$R_i = F_a - k(u_{i-1})\cdot u_{i-1}$

$\Delta u_i = \frac{R_i}{k_{Ti}}$ $\quad u_i = \Delta u_i + u_{i-1}$



Kryteria zbieżności: $\frac{\Delta u_i}{u_i} \le \varepsilon$; $\frac{R_i}{F} \le \delta$

Metoda Newtona-Raphsona



W każdej iteracji w obliczeniach liniowego układu równań używana jest macierz styczna

$$[K]_T = \frac{d\{F\}}{d\{q\}} = [K] + \frac{d[K]}{d\{q\}}\{q\}$$

Sztywność styczna:

$$k_T = \frac{dF}{du} = \frac{d\big(k(u)\big)\cdot u}{du} = \frac{d\big(k(u)\big)}{du}\cdot u + \frac{du}{du}\cdot k(u) = -u + 1 - u = 1 - 2\cdot u$$

Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0 = 1$

Iteracja 1: $k_{T1} = \left.\frac{dF}{du}\right|_{u_0} = 1 - 2\cdot u_0$

Wektor residualny: $R_1 = F_a - k(u_0)\cdot u_0 = F_a$

przyrost przemieszczenia: $\Delta u_1 = \frac{R_1}{k_{T1}}$

przemieszczenie: $u_1 = \Delta u_1 + u_0 = \Delta u_1$

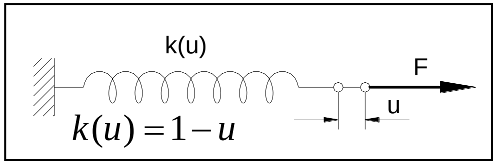
Iteracja „i”: $k_{T1} = \left.\frac{dF}{du}\right|_{u_{i-1}} = 1 - 2\cdot u_{i-1}$

$R_i = F_a - k(u_{i-1})\cdot u_{i-1}$

$\Delta u_i = \frac{R_i}{k_{Ti}}$ $\quad u_i = \Delta u_i + u_{i-1}$

Kryteria zbieżności: $\frac{\Delta u_i}{u_i} \le \varepsilon$; $\frac{R_i}{F} \le \delta$

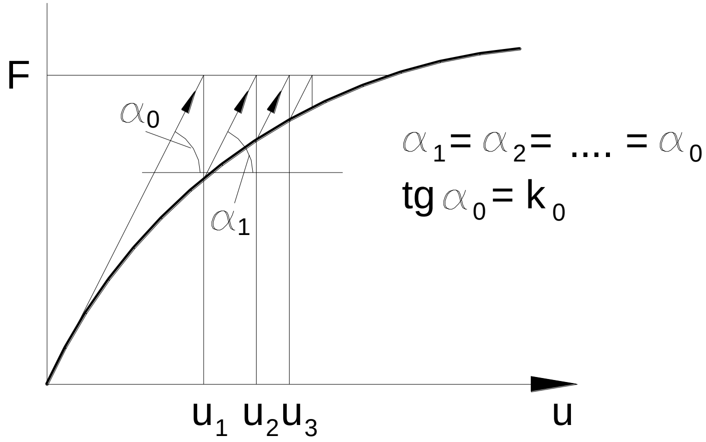
i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1}u_{i-1}$	$k_{Ti} = 1 - 2u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i / k_{Ti}$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	1	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.6	0.0667	0.2667	0.250	0.2
3	0.2667	0.7333	0.0044	0.466	0.0095	0.2762	0.048	0.034
4	0.2762	0.7238	0.0001	0.448	0.0002	0.2764	0.001	0.0005



Zmodyfikowana metoda Newtona-Raphsona

W każdej iteracji używany jest ten sam zestaw równań (ta sama macierz początkowa)

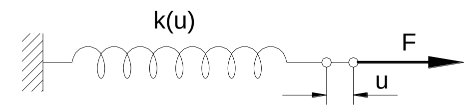
$[K_0]^{-1}$ zamiast $[K]_{i-1}^{-1}$



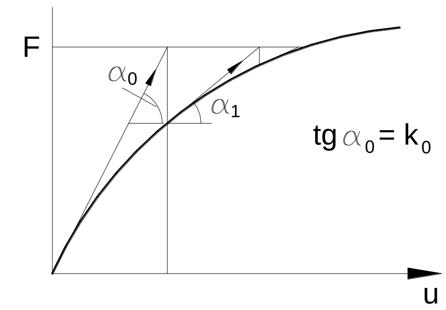
Kryteria zbieżności: $\frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \varepsilon$; $\frac{R_i}{F} \leq \delta$

i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1} u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i / k_0$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.04	0.24	0.167	0.2
3	0.24	0.76	0.0176	0.0176	0.2576	0.068	0.088
4	0.2576	0.7424	0.0087	0.00876	0.2664	0.033	0.044
5	0.2664	0.7336	0.0046	0.0046	0.2710	0.017	0.023
6	0.2710	0.729	0.0024	0.0024	0.2734	0.009	0.012

Metoda Newtona-Raphsona

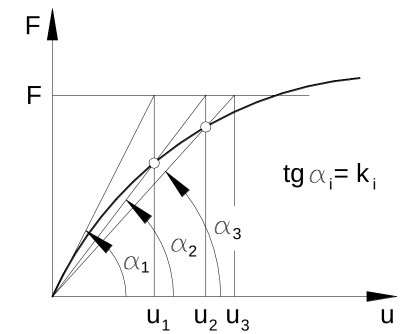


i	u_{i-1}	$k_{i-1}=1-u_{i-1}$	$R_i=F-k_{i-1}u_{i-1}$	$k_{Ti}=1-2u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i/k_{Ti}$	$u_i=u_{i-1}+\Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	1	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.6	0.0667	0.2667	0.250	0.2
3	0.2667	0.7333	0.0044	0.466	0.0095	0.2762	0.048	0.034
4	0.2762	0.7238	0.0001	0.448	0.0002	0.2764	0.001	0.0005



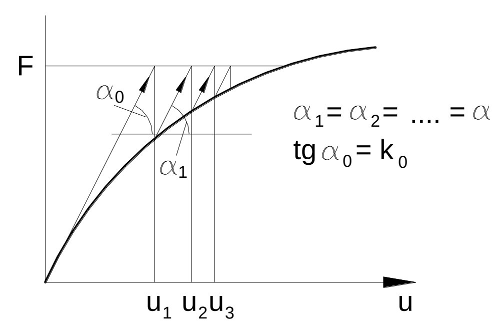
Procedura iteracji bezpośredniej *(podejście przyrostowe)*

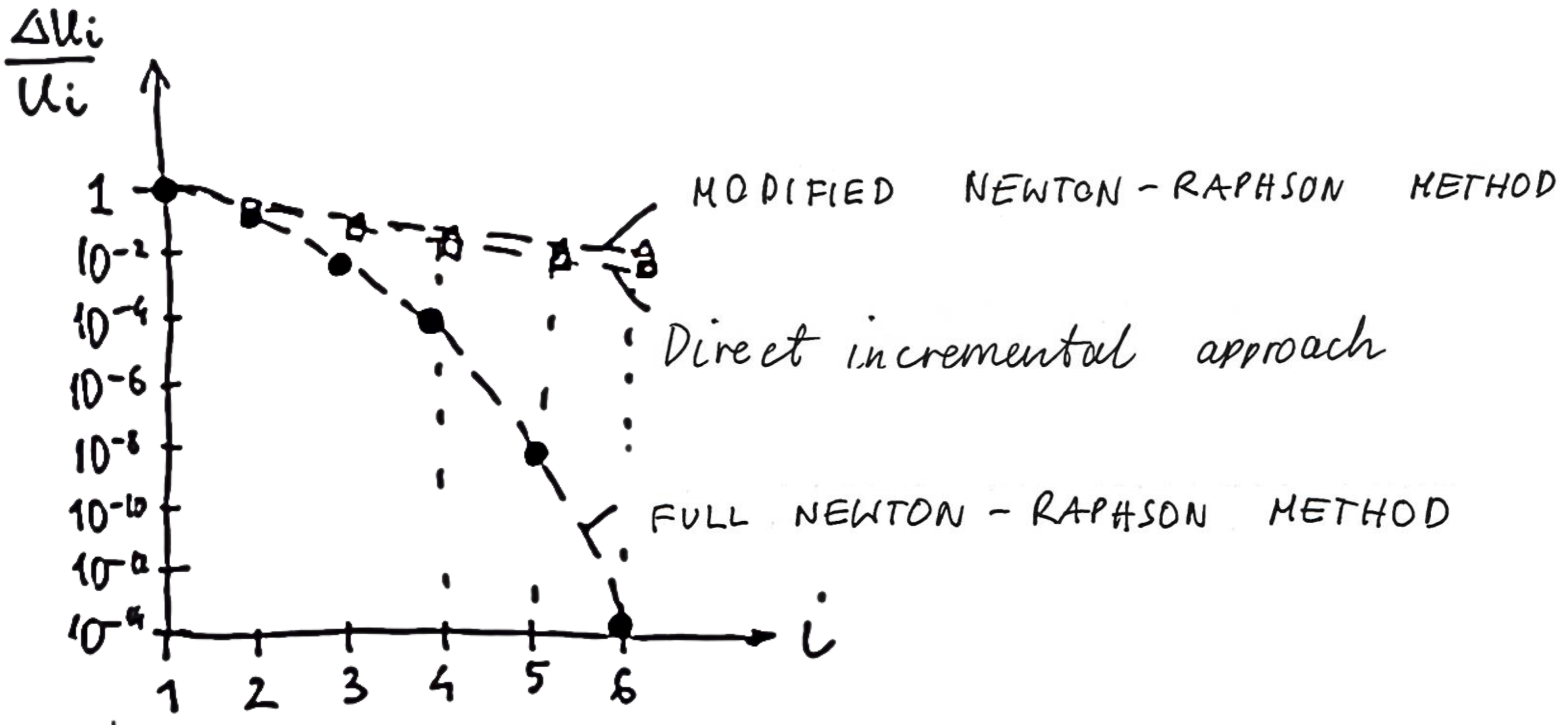
i	u_{i-1}	$k_{i-1}=1-u_{i-1}$	$R_i=F-k_{i-1}u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i/k_{i-1}$	$u_i=u_{i-1}+\Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.05	0.25	0.2	0.2
3	0.25	0.75	0.0125	0.0167	0.2667	0.063	0.063
4	0.2667	0.733	0.0044	0.006	0.2727	0.022	0.022
5	0.2727	0.7273	0.0017	0.0023	0.2750	0.008	0.0085



Zmodyfikowana procedura Newtona-Raphsona

i	u_{i-1}	$k_{i-1}=1-u_{i-1}$	$R_i=F-k_{i-1}u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i/k_0$	$u_i=u_{i-1}+\Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.04	0.24	0.167	0.2
3	0.24	0.76	0.0176	0.0176	0.2576	0.068	0.088
4	0.2576	0.7424	0.0087	0.00876	0.2664	0.033	0.044
5	0.2664	0.7336	0.0046	0.0046	0.2710	0.017	0.023
6	0.2710	0.729	0.0024	0.0024	0.2734	0.009	0.012

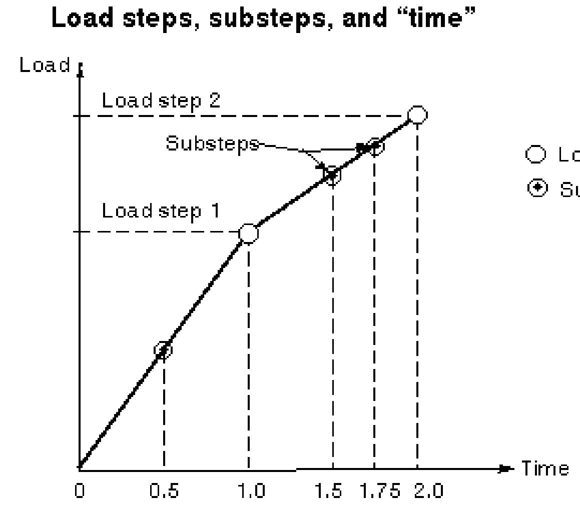


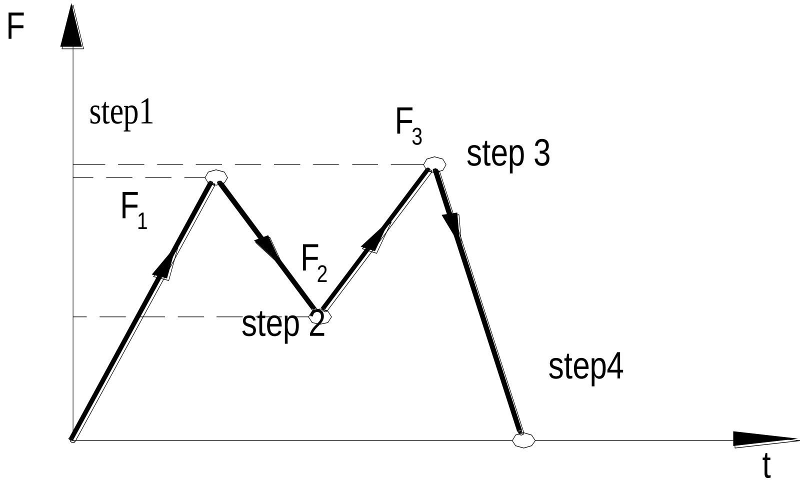


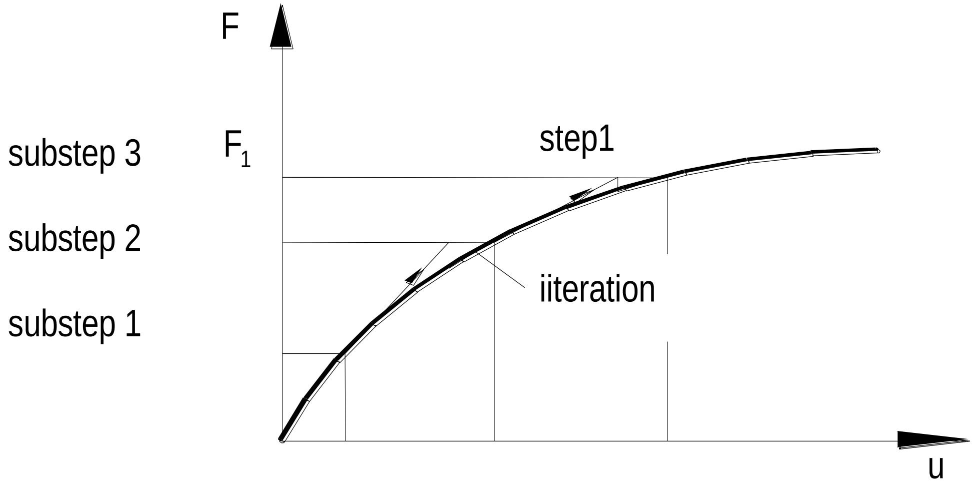
$\frac{\Delta u_i}{u_i}$
1
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
10^{-12}
10^{-14}
1
2
3
4
5
6
i
MODIFIED NEWTON - RAPHSON METHOD
Direct incremental approach
FULL NEWTON - RAPHSON METHOD

Iteracyjne obliczenia nieliniowe w praktyce

Użytkownik wykonuje nieliniową analizę statyczną, dzieląc obciążenie na szereg kroków przyrostowych obciążenia i w każdym kroku wykonując kolejne przybliżenia liniowe w celu uzyskania równowagi. Każde przybliżenie liniowe wymaga jednego przejścia przez solver równań *(iteracja równowagi).*

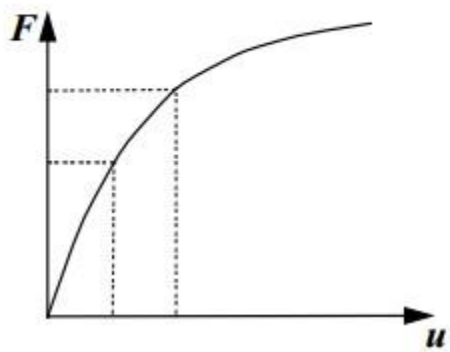






Nieliniowości geometryczne

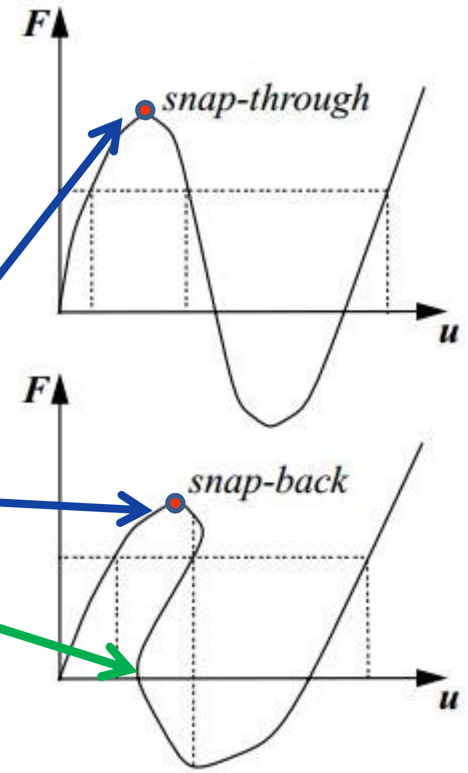
Nieliniowość – charakterystyka mięknąca



Silne nieliniowości ścieżki równowagi

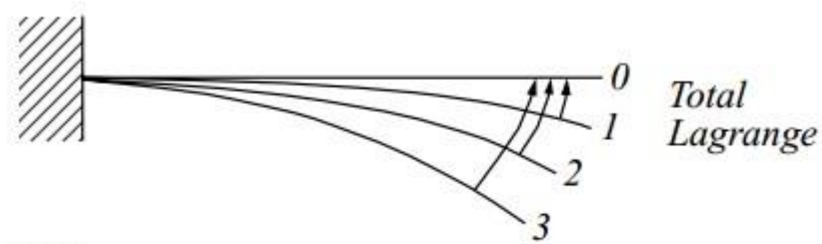
punkty krytyczne

punkty zwrotne

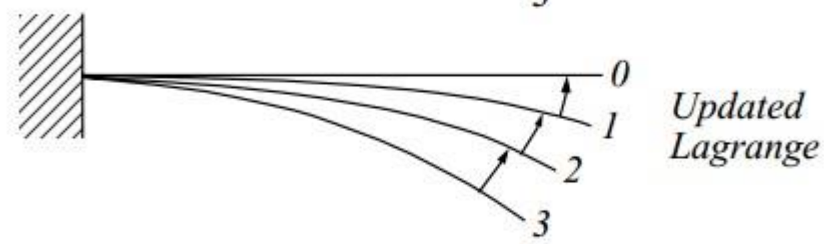


Nieliniowości geometryczne

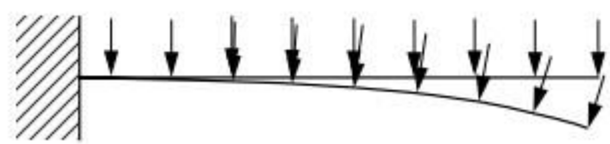
TL – Total Lagrange
(stacjonarny opis Lagrange'a)



UL – Updated Lagrange
(uaktualniony opis Lagrange'a)



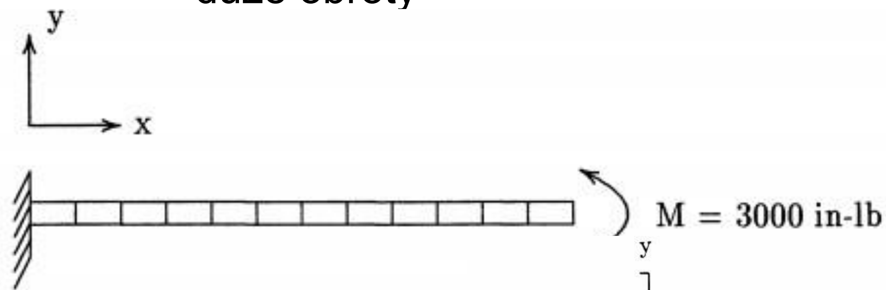
Siły śledzące – (np. ciśnienie)

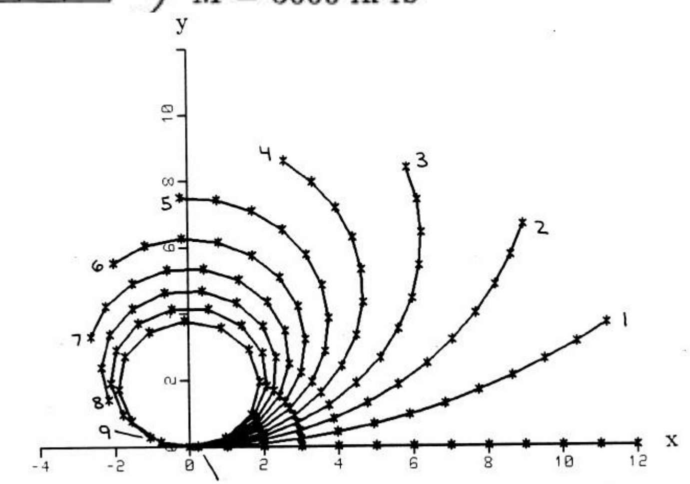


Nieliniowości geometryczne

Nieliniowości geometryczne w MES – test NAFEMS NL5
Elementy belkowe

materiał sprężysty,
duże przemieszczenia
duże obroty





MSC/NASTRAN Nonlinear Analysis

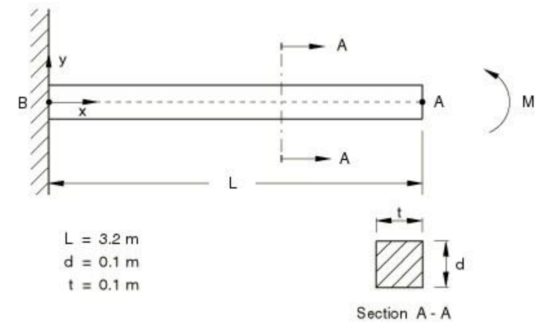
4.6.5 NL5: Straight cantilever with end moment

Product: Abaqus/Standard

Element tested

B22

Problem description



inc	moment (in-lb)	θ_{end}
1	300	36.7°
2	600	73.3°
3	900	110.0°
4	1200	146.7°
5	1500	183.3°
6	1800	220.0°
7	2100	256.6°
8	2400	293.3°
9	2700	330.0°
10	3000	366.6°